Der Ring der konvergenten Potenzreihen ist faktoriell

Aerschmann Stefan

10. Dezember 2010

Inhaltsverzeichnis

0 Motivation

Im Folgenden werden wir von den bisher bekannten Polynomen und Polynomringen übergehen zu den viel allgemeineren Potenzreihen.
Die drei zentralen Punkte werden die folgenden sein:

- Wir werden zeigen, dass der Ring der konvergenten Potenzreihen $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ faktoriell ist.
- Weiter werden wir der Verallgemeinerung der Varietät von Polynomen begegnen, den sogenannten *prinzipal-analytischen Mengen*.
- Und ein weiterer wichtiger Punkt wird die natürliche Verallgemeinerung des Lemmas von Study auf konvergente Potenzreihen sein.

Ausschlaggebend für alle diese Punkte ist der Weierstrasssche Vorbereitungssatz.

1 Faktoriabilität von Ringen

Bevor wir uns der Faktoriabilität des Ringes $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ der konvergenten Potenzreihen zuwenden, betrachten wir zuerst faktorielle Polynomringe.

1.1 Faktoriabilität von $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$

Aus der Algebra kennen wir den wichtigen Satz von Gauss über faktorielle Ringe, wie etwa $\mathbb{R}[X]$. Die Faktoriabilität des Ringes $R[X]$ bedeutet, dass jedes Element $f \neq 0$ im Polynomring $R[X]$ welches keine Einheit ist, eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt.
Per Induktionsbeweis über die Anzahl Veränderlicher beweist man, dass auch $R[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell ist.

Satz 1 (Gauss) *Sei R ein faktorieller Ring. Dann ist auch $R[X]$ faktoriell.*

Beweis: [A. Dessai] □

Nach Gauss ist also $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell.

Dies führt uns direkt zu folgendem wichtigen Punkt.

1.2 Faktoriabilität von $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$

Theorem 1 *Der Ring $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ der konvergenten Potenzreihen ist faktoriell.*

Beweis:

Der Weierstrasssche Vorbereitungssatz und Satz von Gauss ermöglichen es, diesen Beweis sehr elegant und kurz zu führen.

Wir verwenden die folgende Notation:

$$A := \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle,\ X' := (X_1, \ldots, X_{n-1}),\ A' := \mathbb{C}\langle X' \rangle$$

Der Beweis des Theorems wird per Induktion über die Anzahl Veränderlicher geführt. Um den Weierstrassschen Vorbereitungssatz und den Satz von Gauss zu verwenden, behelfen wir uns mit folgender Ringerweiterung:

$$A' \subset A'[X_n] \subset A$$

Für $n = 0$ ist $A = \mathbb{C}$. Und da $\mathbb{C}$ faktoriell ist, ist für diesen Fall nichts mehr zu beweisen. [A. Dessai]
Sei nun nach Induktionshypothese A' faktoriell: A' faktoriell $\overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow}$ $A'[X]$ faktoriell.
Zu zeigen ist, dass jede Reihe $f \in A$ eine bis auf Reihenfolge und Einheiten eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt. Aufgrund des Lemmas [G. Fischer, p.79-80] ist es möglich eine beliebige Reihe $f \neq 0$, $f \in C[[X]]$ mit geeigneter Variablensubstitution so zu verändern, dass die daraus resultierende Reihe X_n-allgemein ist. Somit können wir $f \in A$ als X_n-allgemein annehmen.

Jetzt kann der Weierstrasssche Vorbereitungssatz auf $f \in A$ angewendet werden und man erhält:

$$f = \alpha \cdot p \text{ mit } \alpha \in A \text{ Einheit und } p \in A'[X_n] \text{ Weierstrasspolynom}$$

Da $A'[X_n]$ faktoriell ist, gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zerlegung von p in irreduzible Elemente:

$$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$$

Bemerkung 1 *Sei $f = g \cdot h \in A'[X_n]$ dann gilt:*

a) *g und h Weierstrasspolynome $\Rightarrow$ f Weierstrasspolynom*

b) *f Weierstrasspolynom $\Rightarrow \exists$ Einheiten $\lambda, \mu \in A'$, so dass λg, μh Weierstrasspolynome*

c) *f Weierstrasspolynom: f Einheit in $A \Leftrightarrow f$ Einheit in $A'[X_n] \Leftrightarrow k = 0$, d.h. $p = 1$*

d) *f Weierstrasspolynom: f irreduzibel in $A'[X_n] \Leftrightarrow f$ irreduzibel in A*

Die Beweise sind nachzulesen in [G. Fischer, p.90]

Nach *Bemerkung 1 b)* ist klar, dass die Zerlegung von p eindeutig ist, wenn die $p_1, \ldots, p_n$ zu Weierstrasspolynomen normiert sind. Und nach *Bemerkung 1 d)* ergibt dies folgende irreduzible Zerlegung von f:

$$f = \alpha p_1 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Sei

$$f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_s$$

eine weitere irreduzible Zerlegung von f in A. Indem man die $f_i \in A$, $i = 1, \ldots, s$, nach X_n auszeichnet, kann man diese nach dem Vorbereitungssatz wie folgt darstellen:

$$f_1 = \alpha_1 \cdot q_1, \ldots, f_s = \alpha_s \cdot q_s$$

mit $\alpha_i \in A$ Einheiten und $q_i \in A'[X_n]$ Weierstrasspolynome, $i = 1, \ldots, s$.
Da die Darstellung von f durch den Weierstrassschen Vorbereitungssatz eindeutig ist, folgt

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Da $A'[X_n]$ faktoriell ist, und die $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ nach *Bemerkung 1 d)* irreduzibel in $A'[X_n]$ sind, ist die Zerlegung somit eindeutig. Also gilt $r = s$, und nach eventueller Umnumerierung, ist $p_i = q_i$, für $1 \leq i \leq r$

Also ist $f_i = \alpha_i \cdot p_i$ und $f = \alpha p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit $\alpha := \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$.
Somit besitzt $f \in A$ eine bis auf die Reihenfolge und Einheiten eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren. $\square$

Mittels des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes wurde die bekannte Faktoriabilität der Polynomringe auf den Ring der konvergenten Potenzreihen übertragen.
Dieser Beweis basiert auf der Eigenschaft, dass in faktoriellen Ringen jedes Element, welches nicht null und keine Einheit ist, eindeutig bis auf die Reihenfolge in irreduzible Elemente zerlegt werden kann.

Es kann ein alternativer Beweis geführt werden, basierend auf der Eigenschaft, dass in einem faktoriellen Ring gilt: f irreduzibel $\Leftrightarrow f$ Primelement. [A. Dessai]
Dieser Beweis hat die folgenden zwei wichtigen Teile. Man zeigt im ersten Teil: wenn $f \in A$ zerlegbar ist, und $f = f_1 \cdot f_2$ eine echte Zerlegung ist, dann kann f in endlich viele irreduzible Faktoren zerlegt werden. Im zweiten Teil wird gezeigt, dass alle diese irreduziblen Faktoren prim sind. Der Beweis verwendet neben dem Weierstrassschen Vorbereitungssatz

noch die Divisionsformel und die Eigenschaften der Ordnung einer Potenzreihe. Der Beweis ist nicht ganz so kurz wie der oben geführte Beweis, entspricht aber demselben Schwierigkeitsgrad. [K. Fritzsche]

Weiter lässt sich auch zeigen, dass $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ noethersch ist. Da diese Eigenschaft aber im folgenden Kapitel nicht verwendet wird, wird hier auf den Beweis verzichtet.

2 Nullstellenmengen von Potenzreihen: die prinzipal-analytischen Mengen

In diesem Abschnitt werden wir den bekannten Begriff der Varietäten von Polynomen verallgemeinern auf Potenzreihen. Wir werden übergehen zu den sogenannten *prinzipal-analytischen Mengen*. Die Verallgemeinerung wird unter anderem nötig, da Polynome Funktionen auf ganz $\mathbb{C}^n$ sind, während Potenzreihen nur auf Umgebungen um Null in $\mathbb{C}^n$ konvergieren.

Sei $D := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : 0 \leq |x_i| < \rho_i\} \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder, und $M \subset D$.

Definition 1 *M heisst prinzipal-analytische Menge $\Leftrightarrow \exists f \in A$, f konvergiert auf ganz D, und $M = \{x \in D : f(x) = 0\} =: V_D(f)$.*

Wie man sieht, erhält man, für $n = 2$ und f ein Polynom, eine ebene algebraische Kurve $V_{\mathbb{C}^2}(f)$. Wir befinden uns nun wieder in der uns bekannten Position.

Betrachtet man jedoch die Einheiten aus $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ und $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ etwas genauer, stellt man schnell Unterschiede zwischen den Varietäten und den prinzipal-analytischen Mengen fest.

Für eine Einheit $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ gilt $V(f) = \emptyset$,
während für eine Einheit $f \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ lediglich $f(0) \neq 0$ gilt, i.e. $0 \notin V_D(f)$. Hingegen $V_{D'}(f) = \emptyset$ für eine hinreichend kleine Umgebung $D' \subset D$ um den Ursprung. Das Aussehen von $V_D(f)$ ausserhalb des Ursprungs ist nicht klar.

Dies motiviert die folgenden Definitionen:

Definition 2 *Zwei prinzipal-analytische Mengen $M_1 \subset D_1$ und $M_2 \subset D_2$ heissen äquivalent*
$\Leftrightarrow \exists$ Polyzylinder $D \subset D_1 \cap D_2$ so dass $M_1 \cap D = M_2 \cap D$

Offensichtlich ist damit eine Äquivalenzrelation definiert.

Definition 3 *Eine Äquivalenzklasse von prinzipal-analytischen Mengen heisst prinzipal-analytischer Mengenkeim*

Betrachtet man diese Definition für $n = 2$, so ist ersichtlich, dass die prinzipal-analytischen Mengenkeime eine Verallgemeinerung der Kurvenkeime im Sinne der Differentialgeometrie sind.

Um die enge Verbindung mit den Varietäten von Polynomen aufzuzeigen, bezeichnen wir den prinzipal-analytischen Mengenkeim, welcher durch $V_D(f)$ repräsentiert wird, mit $V(f)$.

Definition 4 $V(f_1) \subset V(f_2) \Leftrightarrow \exists$ *Repräsentanten* $V_{D_1}(f_1)$ *von* $V(f_1)$ *und* $V_{D_2}(f_2)$ *von* $V(f_2)$ *und* $D \subset D_1 \cap D_2$ *so dass* $V_{D_1}(f_1) \cap D \subset V_{D_2}(f_2) \cap D$

Analoge Definitionen für $V(f_1) \cup V(f_2)$ und $V(f_1) \cap V(f_2)$.

Weiter ist $V(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ Einheit in $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$.
Denn f Einheit $\Leftrightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow V(f) = \emptyset$

Dies führt uns zum verallgemeinerten Lemma von Study für konvergente Potenzreihen.

3 Das Lemma von Study für konvergente Potenzreihen

Lemma 1 (Study) *Seien* $f, g \in A$, f *irreduzibel und* $V(f) \subset V(g)$. *Dann gilt:* f *ist ein Teiler von* g *in* A.

Beweis:

Der Beweis läuft per Induktion über n.
Für $n = 0$ ist $A = \mathbb{C}$ und somit ist nichts zu beweisen.
Sei also $X' := (X_1, \ldots, X_n)$ und $A' := \mathbb{C}\langle X' \rangle$.
Durch den Weiertrassschen Vorbereitungssatz kann man f und g als Weierstrasspolynome voraussetzen, d.h. f, $g \in A'[X_n]$ sind von der Form:

$f = X_n^k + a_1 X_n^{k-1} + \ldots + a_k$
$g = X_n^l + b_1 X_n^{l-1} + \ldots + b_l$,
mit $k, l \geq 1$, a_i, $b_j \in A'$ und $a_i(0) = b_j(0) = 0$

Zu zeigen: f und g haben einen gemeinsamen Primfaktor in A.

Da A' nach § 2 faktoriell ist, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $a_i, b_j \in A'$ und $f, g \in A'[X_n]$, kann der

Resultantensatz angewendet werden, und es gilt:

$$f \text{ und } g \text{ haben in } A'[X_n] \text{ einen gemeinsamen Faktor mit Grad } \geq 1 \Leftrightarrow R_{f,g} = 0 \text{ in } A'$$

Nach *Bemerkung 1 d)* ist f auch irreduzibel in $A'[X_n]$. Es genügt also zu zeigen: $R_{f,g} = 0$ in A', was die Behauptung $f|g$ impliziert.

Dazu definiert man zwei Polyzylinder:

$$D := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : 0 \leq |x_i| < \rho_i\} \subset \mathbb{C}^n,$$
$$D' := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : |x_i| < \rho_i\} \subset \mathbb{C}^{n-1}, \text{ mit } D' \subset D.$$

Wählt man nun ein beliebiges $x' \in D'$ aus und setzt dies in f und g ein, so erhält man Polynome vom Grad l bzw. k:

$$f_{x'},\ g_{x'} \in \mathbb{C}[X_n].$$

Speziell für $x' = 0$:

$$f_0 = X_n^k \text{ und } g_0 = X_n^l, \text{ d.h. } V(f_0) = V(g_0) = \{0\} \text{ (Nullstelle vom Grad } l \text{ bzw. } k) \ (*)$$

Durch geeignete Wahl von ρ_n, gibt es ein $0 < r < \rho_n$, so dass für alle $x' \in D'$ die Polynome $f_{x'}$ und $g_{x'}$ für $r < |x_n| < \rho_n$ keine Nullstelle haben.

Also gilt nach dem Satz über die Stetigkeit der Wurzeln, mit $(*)$, und der Beziehung $V(f) \subset V(g)$ der Keime:

$f_{x'}$ und $g_{x'}$ haben alle Nullstellen in $E := \{x_n \in \mathbb{C} : |x_n| < \rho_n\}$, und $V(f_{x'}) \subset V(g_{x'})$.
Und da $f_{x'}$ und $g_{x'}$ in 0 eine gemeinsame Nullstelle haben (i.e. $V(g_{x'} \neq \emptyset)$, gilt:
$f_{x'}$ und $g_{x'}$ haben einen gemeinsamen Primfaktor in $\mathbb{C}[X_n]$.

Also ist $R_{f,g}(x') = R_{f_{x'},g_{x'}} = 0$ in $\mathbb{C}$. Da dies für alle $x' \in D'$ gilt und $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und zusammenhängend, gilt nach dem Identitätssatz für die holomorphe Resultantenfunktion $R_{f,g}$:

$$R_{f,g}(x) = R_{f_x,g_x} = 0 \text{ für alle } x \in D.$$

Also ist $R_{f,g} = 0$ in A'. □

Durch die Verallgemeinerung des Lemmas von Study geht man über von der Komponentenzerlegung algebraischer Kurven zu einer Komponentenzerlegung prinzipal-analytischer Mengenkeime.

Definition 5 *Ein prinzipal-analytischer Mengenkeim* $M = V(f)$ *heisst reduzibel* $\Leftrightarrow \exists V(f_1)$ *und* $V(f_2)$,$V(f_1) \neq V(f_2)$ *mit* $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$ *und* $V(f_i) \neq \emptyset$

Lemma 2 $V(f)$ *irreduzibel* $\Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ *irreduzibel und* $k \in \mathbb{N}^*$ *mit* $f = g^k$

Satz 2 *Jeder prinzipal-analytischer Mengenkeim* $V(f)$ *lässt sich, bis auf die Reihenfolge eindeutig, in irreduzible Komponenten* $V(f_i)$ *zerlegen:* $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$

Die Beweise laufen analog zu den Beweisen für die Varietäten.

Definition 6 *Die Reihe* $f \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ *heisst minimal, wenn alle Primfaktoren* f_i *von* f *nur einfach vorkommen: sei* $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$, f_i *Primelement.*

Definition 7 *Für* f *minimal sei* $ord(V(f)) := ord(f)$ *die Ordnung des Keims* $V(f)$.

Hat man nun ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, f minimal und p ein Punkt auf der algebraischen Kurve $C = V(f)$ gegeben, sind wir nun in der Lage die lokalen Zweige von C im Punkt p zu definieren.

Zuerst muss p so transformiert werden, dass $p = 0$ wird. Danach wird f in $\mathbb{C}\langle X_1, X_2\rangle$ in Primfaktoren $f_1, \ldots, f_r$ zerlegt und anschliessend betrachtet man die daraus resultierenden Mengenkeime $V(f_1), \ldots, V(f_r)$, die lokalen Zweige von $V(f)$ um $p = 0$.

Nachtrag:

Satz 3 (Satz über die Stetigkeit der Wurzeln) *Sei*

$$D' := \{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : |x_i| < \rho_i\},\ E := \{x_n \in \mathbb{C} : |x_n| < \rho_n\},$$

und sei f *holomorph auf dem Polyzylinder* $D' \times E = D$.
Gibt es nun ein $0 < r < \rho_n$, *so dass die holomorphen Fuktionen*

$$f_{x'} : E \to \mathbb{C}, y \mapsto f_{x'}(x_n),\ \textit{mit}\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D'$$

mit $r \leq |x_n| < \rho_n$ *keine Nullstelle haben,*

dann gilt: $\exists k \in \mathbb{N}$, *so dass* $\forall x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D'$ *gilt,* f_x *hat mit Vielfachheit gezählt genau* k *Nullstellen in* E.

Beweis:

Ist $f'_{x'} := \frac{df_{x'}}{dx_n}$ und $r < R < \rho_n$, so ist nach Cauchy

$$k(x') := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x_n|=R} \frac{f'_{x'}(x_n)}{f_{x'}(x_n)} dx_n \in \mathbb{N}$$

Für fixiertes x' zählt $k(x')$ dies Nullstellen von $f_{x'}$ in $|x_n| < R$

Da $k(x')$ stetig von x' abhängt, ist es konstant. $\square$

Literatur

[A. Dessai] Prof. Dr. Anand Dessai *Vorlesungsskript zu Algebra und Geometrie I.* Universität Freiburg i. Üe., Herbstsemester 2009

[G. Fischer] Prof. Dr. Gerd Fischer *Ebene algebraische Kurven.* vieweg studium, 1991, p.86-94

[K. Fritzsche] Prof. Dr. Klaus Fritzsche *Vorlesungsskript zu Funktionstheorie 3, Kaptiel 2.* Universität Wuppertal, Sommersemester 2003, p.1 - 18