

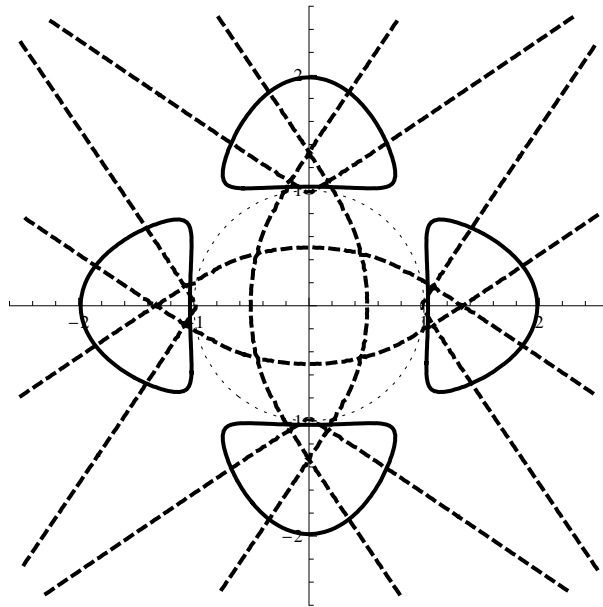
Proseminar HS 2010 - Ebene algebraische Kurven

Vortrag I.6

# Duale Kurven

David Bürge

4. November 2010



Eine nierenförmige Kleinsche Quartik und ihre duale Kurve in  $\mathbb{R}^2$

## Inhaltsverzeichnis

<b>0 Überblick</b>	<b>2</b>
<b>1 Definitionen</b>	<b>2</b>
1.1 Der duale projektive Raum . . . . .	2
1.2 Die duale Kurve . . . . .	3
<b>2 Eigenschaften der dualen Kurve</b>	<b>4</b>
<b>3 Beispiele</b>	<b>6</b>
3.1 Quadriken . . . . .	6
3.2 Neilsche Parabel . . . . .	7
3.3 Newtonscher Knoten . . . . .	8
<b>4 Algebraizität und Irreduzibilität von <math>C^*</math></b>	<b>10</b>

## 0 Überblick

Um später die Plückerformeln, welche Aussagen über die Beziehungen verschiedener Invarianten einer algebraischen Kurve machen, herzuleiten wird in diesem Vortrag die duale Kurve  $C^*$  einer algebraischen Kurve  $C$  eingeführt.

Ziel des Vortrages ist es zu beweisen, dass für eine algebraische Kurve  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  ohne Geraden die duale Kurve  $C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  algebraisch ist und dass aus der Irreduzibilität von  $C$  die Irreduzibilität von  $C^*$  folgt. Weiter werden einige Beispiele zum besseren Verständnis des dualen projektiven Raumes  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  und der dualen Kurve  $C^*$  besprochen.

Erst in einem weiteren Vortrag wird gezeigt, dass  $C^{**} = C$  gilt, und aus dem Verhalten der kritischen Punkte beim Dualisieren die Plückerformeln hergeleitet.

## 1 Definitionen

### 1.1 Der duale projektive Raum

**Definition 1.** *Eine Gerade im projektiven Raum*

$$V(y_0X_0 + y_1X_1 + y_2X_2) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$$

*entspricht einem Punkt des **dualen projektiven Raumes***

$$y = (y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}).$$

Diese Gerade ist bezüglich dem Punkt  $(y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  die Polare der Quadrik  $V(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$ .

Betrachtet man den affinen Teil, so erhalten wir für einen Punkt  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$  die zugehörigen Gerade  $V(1 + y_1X_1 + y_2X_2) \subset \mathbb{C}^2$ .

Eingeschränkt auf den reell-affinen Teil liegt die zu  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  entsprechende Gerade senkrecht zur Gerade durch  $y$  und den Ursprung.

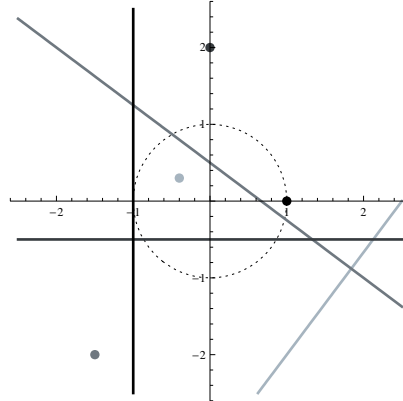


Abbildung 1: Die Geraden in  $\mathbb{R}^2$  zu den Punkten  $y = (1, 0); (0, 2); (-1.5, -2); (-0.4, 0.3)$  des dualen Raumes.

Ihr Abstand zum Ursprung beträgt

$$\left| \frac{1 + y_1 X_1 + y_2 X_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right|_{X_1=X_2=0} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \|y\|_2^{-1}.$$

Insbesondere ist die zu  $y$  entsprechende Gerade die Polare zum Einheitskreis  $V(1 - X_1^2 - X_2^2)$  bezüglich dem Punkt  $-y = (-y_1, -y_2)$ .

## 1.2 Die duale Kurve

**Definition 2.** Sei  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  eine algebraische Kurve. Dann heisst

$$C^* := \{L \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}) : L \text{ ist Tangente an } C \text{ in einem } p \in C\}$$

die zu  $C$  **duale Kurve**.

Zuallererst einige einfache Beispiele:

1. Ist  $C$  eine Gerade, so ist  $C^*$  nur ein Punkt in  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ , da  $C$  selbst die einzige Tangente an  $C$  ist.
2. Ist  $C$  ein Kreis mit Radius  $r$  um den Ursprung, so ist  $C^*$  ein Kreis mit Radius  $\frac{1}{r}$  um den Ursprung.

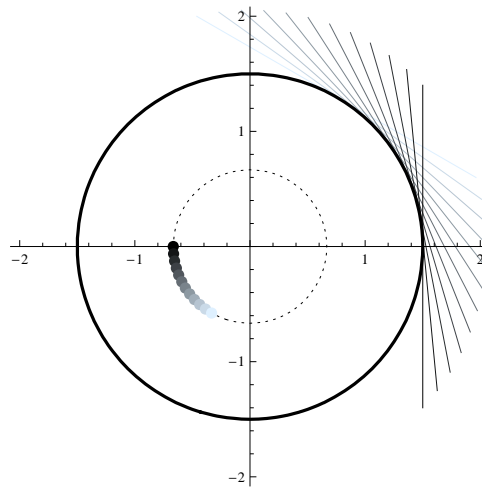


Abbildung 2: Zum Kreis mit Radius  $\frac{3}{2}$  ist die duale Kurve ein Kreis mit Radius  $\frac{2}{3}$ .

## 2 Eigenschaften der dualen Kurve

Als nächstes sollen einige allgemeine Eigenschaften der dualen Kurve betrachtet werden.

**Theorem 1.** Sei  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  eine algebraische Kurve ohne Gerade als Komponente. Dann gilt:

1.  $C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  ist eine algebraische Kurve.
2. Ist  $C$  irreduzibel, so ist  $C^*$  irreduzibel und  $\deg C^* \geq 2$ .
3.  $C^{**} = C$ .

*Beweis:* Zum Beweis der ersten beiden Aussagen werden wir zwei verschiedene Techniken benutzen:

Die eine Methode versucht mit Hilfe einer Parametrisierung von  $C$  eine *Parametrisierung* von  $C^*$  zu beschreiben. Im Falle einer glatten Kurve gelingt dies relativ einfach dank der Abbildung

$$\sigma : C \rightarrow C^*, \quad p \mapsto \left( \frac{\partial F}{\partial X_0}(p), \frac{\partial F}{\partial X_1}(p), \frac{\partial F}{\partial X_2}(p) \right).$$

Den allgemeinen Fall werden wir in Abschnitt 4 behandeln.

Der zweite Ansatz besteht darin anhand der Gleichung von  $C$  eine *Gleichung* von  $C^*$  zu finden. Dazu betrachten wir erst die Schnittpunkte der Kurve  $C = V(F)$  mit einer



### 3 Beispiele

#### 3.1 Quadriken

Für **glatte Quadriken**  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  gibt es eine symmetrische, reguläre Matrix  $A$ , so dass

$$\begin{aligned} F(X) &= XAX^T \quad \text{mit } X = (X_0, X_1, X_2) \text{ Minimalpolynom von } C \text{ ist.} \\ &= a_{11}X_0^2 + 2a_{12}X_0X_1 + 2a_{13}X_0X_2 + a_{22}X_1^2 + a_{23}X_1X_2 + a_{33}X_2^2 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= (2a_{11}X_0 + 2a_{12}X_1 + 2a_{13}X_2, 2a_{12}X_0 + 2a_{22}X_1 + \dots, \dots) \\ &= 2XA \end{aligned}$$

und die Koordinaten von  $T_p C$  in  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  sind gegeben durch  $(p_0, p_1, p_2) \cdot A$ . Folglich ist für

$$\sigma : \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}), \quad x \mapsto xA = y$$

$\sigma(C) = C^*$  und

$$y \in C^* \Leftrightarrow x = yA^{-1} \in C \Leftrightarrow 0 = xAx^T = yA^{-1}AA^{-1}y^T = yA^{-1}y^T$$

also  $C^*$  die durch  $A^{-1}$  beschriebene Quadrik  $V(YA^{-1}Y^T)$ .

Für  $F(X) = a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2$  erhält man mit der **Diskriminantenmethode** durch Auflösen nach  $X_2$

$$\begin{aligned} G(X_0, X_1) &= y_2^2 \left( a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2 \frac{1}{y_2^2} (y_0^2X_0^2 + 2y_0y_1X_0X_1 + y_1^2X_1^2) \right) \\ &= (a_2y_1^2 + a_1y_2^2)X_1^2 + 2a_2y_0y_1X_0X_1 + (a_2y_0^2 + a_0y_2^2)X_0^2 \\ \Rightarrow g(X_1) &= \underbrace{(a_2y_1^2 + a_1y_2^2)}_{=b_0} X_1^2 + \underbrace{2a_2y_0y_1}_{=b_1} X_1 + \underbrace{(a_2y_0^2 + a_0y_2^2)}_{=b_2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D(Y) &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 2b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 2b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_0b_1^2 + 4b_0^2b_2 - 2b_0b_1^2 = b_0(4b_0b_2 - b_1^2) \\ &= (a_2Y_1^2 + a_1Y_2^2) (4(a_2Y_1^2 + a_1Y_2^2)(a_2Y_0^2 + a_0Y_2^2) - 4a_2^2Y_0^2Y_1^2) \\ &= 4(a_2Y_1^2 + a_1Y_2^2)(a_2^2Y_0^2Y_1^2 + a_1a_2Y_0^2Y_2^2 + a_0a_2Y_1^2Y_2^2 + a_0a_1Y_2^4 - a_2^2Y_0^2Y_1^2) \\ &= 4Y_2^2(a_2Y_1^2 + a_1Y_2^2) \underbrace{(a_1a_2Y_0 + a_0a_2Y_1 + a_0a_1Y_2)}_{=:F^*} \end{aligned}$$

wobei aus dem Resultat der vorhergehenden Rechnung oder aus der Tatsache, dass  $V\left(\frac{D}{F^*}\right)$  nur Geraden sind, folgt, dass  $F^*$  eine Gleichung für  $C^*$  ist.

### 3.2 Neilsche Parabel

Die Neilsche Parabel  $C = V(X_1^3 - X_0X_2^2)$  hat die rationale Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}), \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^3 : t_0t_1^2 : t_1^3).$$

Wir betrachten

$$\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (t_0, t_1) \mapsto (t_0^3, t_0t_1^2, t_1^3)$$

mit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_0} = (3t_0^2, t_1^2, 0) \text{ und } \frac{\partial \phi}{\partial t_1} = (0, 2t_0t_1, 3t_1^2).$$

Diese zwei Vektoren in  $\mathbb{C}^3$  spannen die Tangente von  $C$  im Punkt  $\varphi(t)$  für  $t \neq (1 : 0)$  auf. Ihr Vektorprodukt gibt den zur Tangente senkrechten Vektor

$$(3t_1^4, -9t_0^2t_1^2, 6t_0^3t_1) = 3t_1(t_1^3, -3t_0^2t_1, 2t_0^3)$$

in  $\mathbb{C}^3$ . Also ist  $y = (t_1^3 : -t_0^2t_1 : 2t_0^3) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  Koordinate der Tangente in  $\varphi(t)$  für alle  $t \neq (1 : 0)$  und ebenfalls für  $t = (1 : 0)$ , da  $V(X_2)$  die Spitzentangente ist. Damit haben wir die gesuchte Parametrisierung von  $C^*$ :

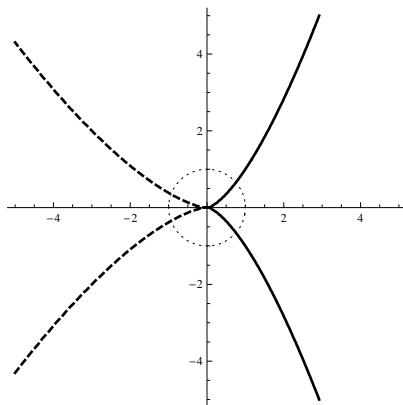
$$\varphi^* : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}), \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_1^3 : -3t_0^2t_1 : 2t_0^3).$$

Wiederholt man dieses Vorgehen mit  $\varphi^*$  sieht man, dass  $C^{**} = C$  hier gilt.

Betrachtet man die Singularitäten der beiden Kurven, so stellt man fest, dass die Spitze  $(1 : 0 : 0) = \varphi(1 : 0)$  von  $C$  dem Wendepunkt  $\varphi^*(1 : 0) = (0 : 0 : 1)$  von  $C^*$  und der Wendepunkt  $(0 : 0 : 1) = \varphi(0 : 1)$  von  $C$  der Spitze  $\varphi^*(0 : 1) = (1 : 0 : 0)$  von  $C^*$  entspricht.

Die **Diskriminantenmethode** ergibt hier folgende Rechnung (wobei hier der einfacheren Rechnung wegen nach  $X_0$  aufgelöst wird):

$$\begin{aligned} G(X_1, X_2) &= y_0^3 \left( X_1^3 + \frac{1}{y_0}(y_1X_1 + y_2X_2)X_2^2 \right) \\ &= y_0^3X_1^3 + y_0^2y_1X_1X_2^2 + y_0^2y_2X_2^3 \\ \Rightarrow g(X_1) &= \underbrace{y_0^3}_{=b_0} X_1^3 + \underbrace{y_0^2y_1}_{=b_2} X_1 + \underbrace{y_0^2y_2}_{=b_3} \\ \Rightarrow D(Y) &= \begin{vmatrix} b_0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 3b_0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3b_0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3b_0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -2b_2 & -3b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_2 & -3b_3 \\ 0 & 0 & 3b_0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= b_0^2(4b_2^3 + 27b_0b_3^2) = Y_0^6(4Y_0^6Y_1^3 + 27Y_0^3Y_0^4Y_2^2) \\ &= Y_0^{12} \underbrace{(4Y_1^3 + 27Y_0Y_2^2)}_{=: F^*} \end{aligned}$$

Abbildung 3: Die Neilsche Parabel und ihre duale Kurve in  $\mathbb{R}^2$ Abbildung 4: Die Neilsche Parabel und ihre duale Kurve in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  bzw.  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ 

Wiederum ist man dank der berechneten Parametrisierung  $\varphi^*$  in der Lage  $F^*$  als Minimalpolynom von  $C^*$  zu identifizieren. Die duale Kurve  $C^*$  der Neilschen Parabel ist hier eine leicht skalierte Spiegelung.

### 3.3 Newtonscher Knoten

Wie bei der Neilschen Parabel berechnet man für den Newtonschen Knoten

$$C = V(X_1^3 + X_0X_1^2 - X_0X_2^2)$$

mit Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}), \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^3 : t_0(t_1^2 - t_0^2) : t_1(t_0^2 - t_1^2))$$

eine Parametrisierung der dualen Kurve und deren Gleichung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t_0} &= (3t_0^2, t_1^2 - 3t_0^2, 2t_0t_1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t_1} = (0, 2t_0t_1, t_0^2 - 3t_1^2) \\ &\rightsquigarrow (6t_0^2t_1^2 - 3t_0^4 - 3t_1^4, -3t_0^4 + 9t_0^2t_1^2, 6t_0^3t_1) = -3((t_0^2 - t_1^2)^2, t_0^2(t_0^2 - 3t_1^2), -2t_0^3t_1) \end{aligned}$$



ergibt die Parametrisierung

$$\varphi^* : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}), \quad (t_0 : t_1) \mapsto ((t_0^2 - t_1^2)^2 : t_0^2(t_0^2 - 3t_1^2) : -2t_0^3t_1).$$

Und die Gleichung für  $C^*$  folgt aus:

$$\begin{aligned} G(X_1, X_2) &= y_0^3 \left( X_1^3 - \frac{1}{y_0}(y_1X_1 + y_2X_2)X_1^2 + \frac{1}{y_0}(y_1X_1 + y_2X_2)X_2^2 \right) = \dots \\ \Rightarrow g(X_2) &= \underbrace{y_0^2y_2}_{=b_0} X_2^3 + \underbrace{y_0^2y_1}_{=b_1} X_2^2 + \underbrace{(-y_0^2y_2)}_{=b_2=-b_0} X_2 + \underbrace{y_0^3 - y_0^2y_1}_{=b_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D(Y) &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & -b_0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & -b_0 & b_3 \\ 3b_0 & 2b_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b_0 & 2b_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b_0 & 2b_1 & -b_0 \end{vmatrix} = \dots \\ &= b_0(-4b_0^4 + 27b_0^2b_3^2 + 18b_0^2b_1b_3 - b_0^2b_1^2 + 4b_1^3b_3) = \dots \\ &= -Y_0^{10}Y_2 \underbrace{(4(Y_1^2 - Y_2^2)^2 - 4Y_0Y_1(Y_1^2 - 9Y_2^2) - 27Y_0^2Y_2^2)}_{=:F^*} \end{aligned}$$

Hier gleicht die duale Kurve  $C^*$  dem Newtonschen Knoten nicht mehr und ist sogar von anderem Grad. Sie ist ein herzförmige Quartik mit Doppeltangente  $V(Y_0)$ .

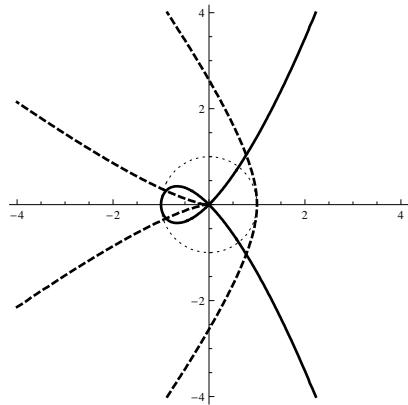


Abbildung 5: Der Newtonsche Knoten und seine duale Kurve in  $\mathbb{R}^2$

Dem Doppelpunkt  $(1 : 0 : 0) = \varphi(1 : 1) = \varphi(1 : -1)$  von  $C$  entsprechen die beiden Punkte  $\varphi^*(1 : 1) = (0 : -1 : -1)$  und  $\varphi^*(1 : -1) = (0 : -1 : 1)$  auf der Doppeltangente  $V(Y_0)$  an  $C^*$ . Dem Wendepunkt  $(0 : 0 : 1) = \varphi(0 : 1)$  entspricht die Spitze  $\varphi^*(0 : 1) = (1 : 0 : 0)$  von  $C^*$ .

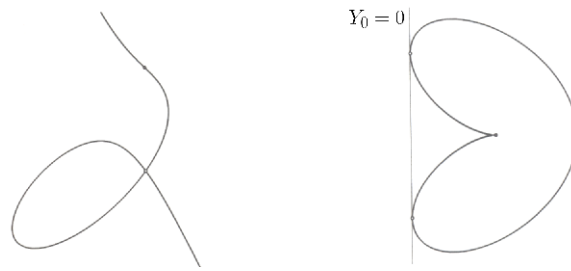


Abbildung 6: Der Newtonsche Knoten und seine duale Kurve in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  bzw.  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$

### 4 Algebraizität und Irreduzibilität von $C^*$

Nun soll der in Abschnitt 2 begonnene Beweis der Algebraizität zu Ende geführt werden. Wir behaupten, dass es Geraden  $L_1^*, \dots, L_k^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  gibt, so dass

$$C' = C^* \cup L_1^* \cup \dots \cup L_k^*. \tag{1}$$

Suchen wir nun also diese Linearfaktoren von  $D$ .

Da wir die Diskriminante von  $g$ , einer Funktion nur über  $X_1$ , genommen haben, erhalten wir eine erste Art von Linearfaktoren wegen den Punkten  $C \cap V(X_0)$ . Sei ein solcher Punkt  $x = (0 : x_1 : x_2) \in C$  (o.B.d.A.  $x_1 \neq 0$ ). Jeder Gerade in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  durch  $x$  entspricht  $y = (y_0 : -x_2 : x_1)$  für ein  $y_0$ . Die Menge dieser  $y \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  ist die Gerade  $V(x_1 Y_1 + x_2 Y_2) \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ . Da  $x$  ein Schnittpunkt der zu  $y$  entsprechenden Gerade in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  mit  $C$  ist, gilt  $0 = G(0, x_1) = b_0(y)x_1^n$  und es folgt  $b_0(y) = 0$  für alle solchen  $y$ . Also teilt  $x_1 Y_1 + x_2 Y_2$  das Polynom  $b_0$  und damit auch  $D$ . Somit haben wir einen Linearfaktor

$$L' := V(x_1 Y_1 + x_2 Y_2) \subset C' \quad \text{für jedes der endlich vielen } x \in C \cap V(X_0).$$

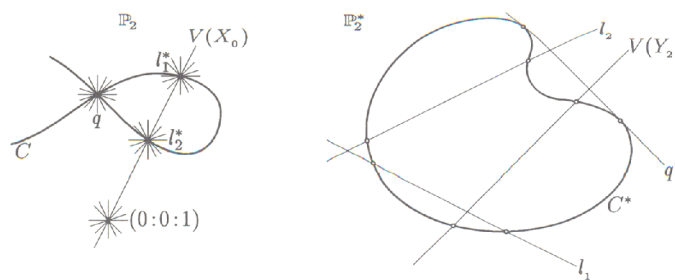


Abbildung 7: Linearfaktoren von  $D$

Weitere Linearfaktoren tauchen infolge der Singularitäten auf. Sei  $x = (x_0 : x_1 : x_2) \in C$  singularär (o.B.d.A.  $x_0 = 1$ ). Dann hat  $g(X_1) = G(1, X_1)$  für

jede Gerade  $y$  durch  $x$  eine mehrfache Nullstelle in  $X_1 = x_1$  und es folgt  $D(y) = 0$ . Die Gerade all dieser  $y \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$

$$L'' = V(x_0Y_0 + x_1Y_1 + x_2Y_2) \subset C'$$

ist also für jede der endlich vielen Singularitäten  $x \in C$  eine Linearfaktor von  $D$ .

Ist  $x \in C$  weder singulär noch in  $V(X_0)$  so ist  $D(y)$  dann und nur dann Null wenn  $y$  einer Tangente an  $C$  in  $x$  entspricht. Seien also  $L_1^*, \dots, L_k^*$  die endlich vielen Geraden  $L'$  und  $L''$ . Können wir zeigen, dass

$$C^* = \overline{C \setminus (L_1^* \cup \dots \cup L_k^*)}$$

gilt, so ist (1) gezeigt und wir sind fertig. Dies folgt aber aus der Definition der Tangenten in singulären Punkten und der (noch unbewiesenen) Konvergenz der Tangenten.

Damit ist Teil 1 des Theorems, die Algebraizität von  $C^*$ , gezeigt.  $\square$

Als letztes soll nun der 2. Teil des Theorems gezeigt werden, also dass die duale Kurve  $C^*$  einer irreduziblen Kurve  $C$  ebenfalls irreduzibel und von Grad  $\geq 2$  ist.

Dazu benutzen wir das Ergebnis eines späteren Vortrages:

**Theorem.** *Zu jeder irreduziblen algebraischen Kurve  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  gibt es eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche  $S$  und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : S \rightarrow C,$$

die ausserhalb der Singularitäten von  $C$  biholomorph ist.

Ist  $p \in C$  singulär, so kann  $\varphi^{-1}(p) \subset S$  aus mehreren (höchstens endlich vielen) Punkten bestehen, die den lokalen Zweigen von  $C$  durch  $p$  entsprechen und zu denen verschiedene Tangenten durch  $p$  gehören, woraus die Mehrdeutigkeit von  $\sigma : C \rightarrow C^*$  folgt. Mit  $\varphi : S \rightarrow C$  konstruieren wir nun eine (eindeutige) holomorphe Parametrisierung

$$\varphi^* : S \rightarrow C^*.$$

Für einen festen Punkt  $o \in S$ , eine genügend kleine offene Umgebung  $U \subset S$  und eine in  $o$  zentrierte lokale Koordinate  $t$  auf  $U$  wollen wir das erst lokal tun. Zu  $\varphi|_U$  betrachten wir ein lokales Lifting, d.h. eine holomorphe Abbildung

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \quad t \mapsto (\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t)),$$

so dass  $\varphi|_U = (\phi_0 : \phi_1 : \phi_2)$ .

Ist  $\varphi$  im Punkt  $t$  immersiv, so sind die Vektoren  $\phi(t)$  und  $\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi}{dt}(t)$  linear unabhängig und spannen die Tangente  $T_{\varphi(t)}C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  in  $\mathbb{C}^3$  auf. Sei

$$(a_0(t), a_1(t), a_2(t)) := \phi(t) \times \dot{\phi}(t)$$

ihr Vektorprodukt, dann ist die Gleichung der Tangente

$$a_0(t)X_0 + a_1(t)X_1 + a_2(t)X_2 = 0.$$

und wir erhalten eine holomorphe Abbildung

$$U \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad t \mapsto (a_0(t), a_1(t), a_2(t)),$$

die sich dank dem folgenden Lemma in die nicht immersiven Punkte von  $\varphi$  zu einer holomorphen lokalen Parametrisierung

$$\varphi^* : U \rightarrow C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$$

fortsetzen lässt.

**Lemma 1.** *Sei  $0 \in U \subset \mathbb{C}$  und  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  holomorph mit  $0$  als einziger Nullstelle von  $\Psi$ . Dann gestattet die Abbildung*

$$\psi : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}), t \mapsto (\Psi_0(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t)),$$

eine holomorphe Fortsetzung in  $0$ .

*Beweis:* Für  $k \geq 1$  Minimum der Nullstellenordnung der  $\Psi_i$  in  $0$  ist

$$\Psi(t) = t^k \cdot \tilde{\Psi}(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\Psi}(0) \neq (0, 0, 0)$$

und damit  $\psi(0) := (\tilde{\Psi}_0(0) : \tilde{\Psi}_1(0) : \tilde{\Psi}_2(0))$  die gewünschte Fortsetzung.  $\square$

**Lemma 2.** *Die so erhaltene Parametrisierungen  $\varphi^* : U \rightarrow \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  sind unabhängig von der Wahl der lokalen Liftung  $\phi$  und der lokalen Koordinate  $t$ .*

*Beweis:* Für jedes weitere Lifting  $\theta$  auf  $U$  muss gelten  $(\theta_0 : \theta_1 : \theta_2) = \varphi|_U = (\phi_0 : \phi_1 : \phi_2)$  und daher  $\theta = \lambda\phi$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Aus der Bilinearität des Vektorproduktes folgt dann

$$\varphi_\theta^* = \lambda^2 \varphi_\phi^*, \quad \text{also} \quad \varphi_\theta^* = \varphi_\phi^* \text{ in } \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}) \quad \square$$

So erhält man eine holomorphe Abbildung  $\varphi^* : S \rightarrow \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  und mit der Konvergenz der Tangenten gilt  $\varphi^*(S) = C^*$ , also ist  $\varphi^*$  eine globale holomorphe Parametrisierung von  $C^*$ .

Angenommen  $C^*$  wäre reduzibel, d.h.  $C^* = C_1 \cup C_2$  mit  $C_1 \neq C_2$ . Da die  $C_i$  algebraische Kurven sind und  $\varphi^*$  holomorph ist, wären die  $S_i := (\varphi^*)^{-1}(C_i) \subsetneq S$  lokal als Nullstellenmengen von holomorphen Funktionen beschrieben und weil  $S$  kompakt und zusammenhängend ist wären sie wegen dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen endlich, im Widerspruch zu  $S = S_1 \cup S_2$ . Also ist  $C^*$  irreduzibel.

Wäre  $C^*$  eine Gerade, so würden unendlich viele Tangenten an  $C$  durch einen festen Punkt in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  gehen. Da es aber durch einen festen Punkt nur endlich viele Tangenten an  $C$  geben kann, muss  $C^*$  von Grad  $\geq 2$  sein.

Damit ist auch die zweite Aussage des Theorems bewiesen.  $\square$

## Literatur

- [1] Fischer, Gerd (1994). *Ebene algebraische Kurven*. Wiesbaden: Vieweg.