Ebene algebraische Kurven

Skript zum Vortrag I.1: Einführung und Beispiele zu ebenen algebraischen Kurven

Richard Conrardy

30.09.2010

Inhaltsverzeichnis

1 einige Beispiele

1.1 Peanokurve (oder Hilbertkurve)

Die Peanokurve entsteht durch einen Algorithmus, der ein Bild mehrfach wieder abbildet, mit Drehungen oder Spiegelungen, und man den Limes eines solchen Algorithmus nimmt.

Bei dem Beispiel unten wird z.B. das linke untere Viertel 90° im Uhrzeigersinn gedreht, das linke obere Viertel wird einfach übernommen und rechts wird über die vertikale Mittelaxe gespiegelt.

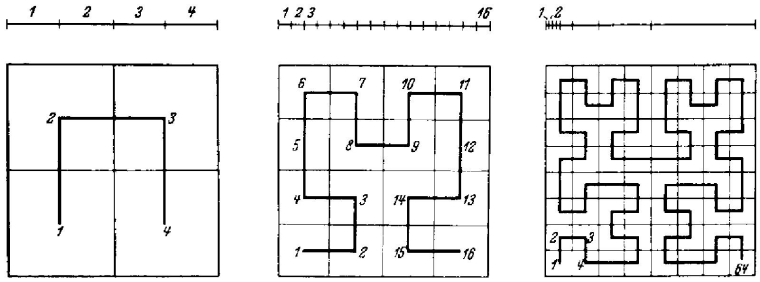
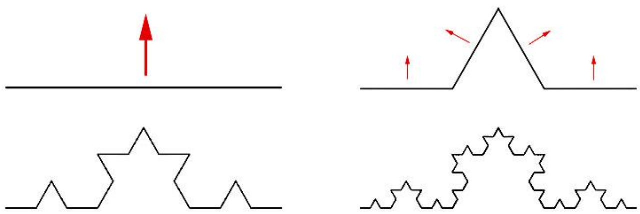


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

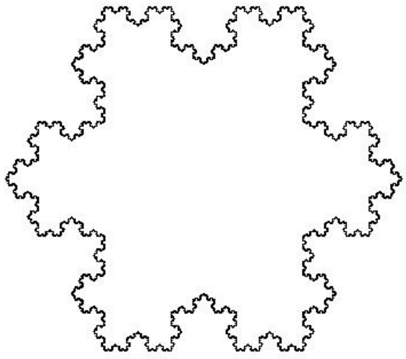
1.2 Schneeflockenkurve (oder Kochkurve)

Die Schneeflockenkurve entsteht dadurch, dass man jedes Segment in drei Drittel aufteilt, und das mittlere Drittel durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt (draufsetzt), bei welchem man die Basis löscht.

Als Segment betrachtet man jede gerade Linie. Man kann bei einer geraden Linie oder bei einem gleichseitigen Dreieck anfangen, wodurch es dann bei letzterem die Schneeflockenform annimmt, welche der Titel suggeriert.



Da jedes Segment nach jeder Iteration um 4/3 länger wird, kann die Schneeflockenkurve **nicht rektifizierbar** sein. Wir versuchen uns ab jetzt auf rektifizierbare Kurven zu beschränken, das heisst auf Kurven bei denen man eine Länge zwischen 2 verschiedenen Punkten messen kann.



1.3 Zykloide

Die Zykloide beschreibt die Bewegung eines Fahrradventils eines rollenden Rads (Einheitskreis). Man kann sie parametrisieren mit

$$x_1 = t - sin(t), x_2 = 1 - cos(t)$$

Es handelt sich um eine **transzendente Parametrisierung**. Um zu beweisen, dass sie nicht durch algebraische Gleichungen ausgedrückt werden kann, reicht es sich bewusst zu sein, dass die Kurve unendlich viele Nullstellen hat.

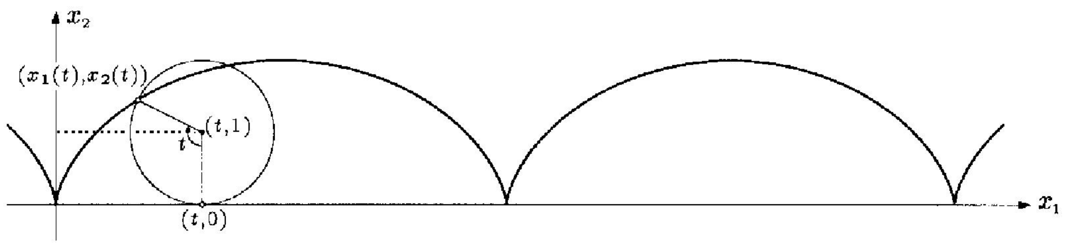


Abbildung 1: Zykloide

Parametrisierung

Eine Parameterdarstellung, oder Parametrisierung, einer ebenen Kurve ist eine Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \varphi(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Wenn man t als Zeit interpretiert, so beschreibt die Parametrisierung den (bzw. einen möglichen) Vorgang die Kurve per Hand zu zeichnen.

2 algebraische Beispiele

Wir haben uns bisher auf ebene Kurven beschränkt, das heisst, dass wir uns ausschliesslich in zweidimensionalen Räumen bewegen. Nun beschränken wir uns auch auf algebraische Kurven, diese müssen durch Polynomgleichungen (nicht unendliche Reihen) beschrieben werden können. Algebraische Kurven sind also Nullstellenmengen von Polynomen.

2.1 Kreis

Der Einheitskreis C, in der Ebene (x_1, x_2), hat die Gleichung $F(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

Ein allgemeiner Kreis, mit Zentrum (a, b) und Radius r hat dann als **algebraische Gleichung**

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2 = 0$$

Transzendent parametrisieren kann man den Kreis durch:

$$\varphi(t) = (a + r \cdot \cos(t), b + r \cdot \sin(t))$$

Aber im Gegensatz zur Zykloide kann man den Kreis auch **rational parametrisieren**. Die rationale Parametrisierung sieht für den Einheitskreis folgendermassen aus:

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to C \backslash \{p\} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

Um zuerst zu überprüfen, dass es sich um eine Parametrisierung handelt, kann man schnell nachrechnen, dass $F(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$ ist.

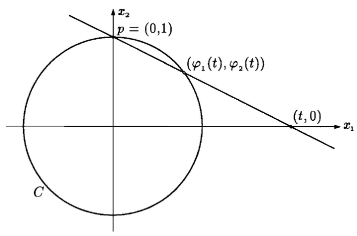


Abbildung 2: Rational parametrisierter Kreis

Diese Parametrisierung bildet den Punkt t auf den Punkt des Kreises ab, der auf gerader Linie zwischen dem Punkt $(0, 1)$ und $(t, 0)$ liegt. Da wir uns momentan auf $\mathbb{R}$ beschränken, ist der Punkt $(0, 1)$ nicht mitparametrisiert.

Es ist jedoch sinnvoll einen **projektiven Abschluss** zu konstruieren, durch das Hinzufügen eines **unendlich fernen Punktes** im Definitionsbereich der Parametrisierung, kann man den Punkt $\gamma(\infty) = (0, 1)$ erhalten.

Die Parametrisierung kann man nun definieren als:

$$C: \quad \varphi: \quad P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \varphi(t) = \begin{cases} (0,1) & |t = \infty \\ (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) & |t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

2.2 Felix Kleins Familie von Quartiken

Eines der Interessensgebiete beim Studium von algebraischen Kurven sind **Doppeltangenten**, dies sind Tangenten mit zwei Berührungspunkten.

In diesem Zusammenhang kann man eine Familie von Quartiken betrachten, welche von Felix Klein definiert wurde. Quartike sind Nullstellenmengen von Polynomen des vierten Grades. Um sie zu konstruieren, nimmt man zwei Ovale

$$f_1 = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 1 = 0$$

$$f_2 = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$f_1 \cdot f_2 - \epsilon = 0$ produziert nun die gewünschte Familie.

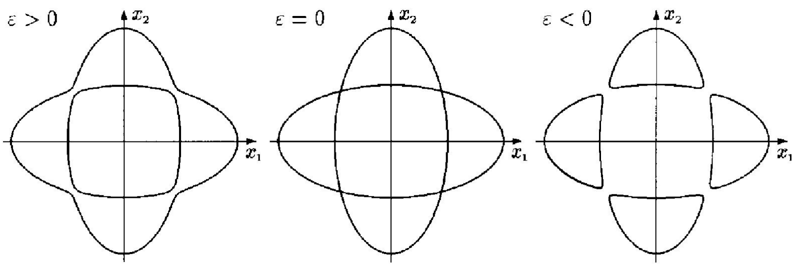


Abbildung 3: Drei Beispiele von Felix Kleins Familie von Quartiken

Der Fall $\epsilon < 0$ ist eine Figur mit 28 Doppeltangenten.

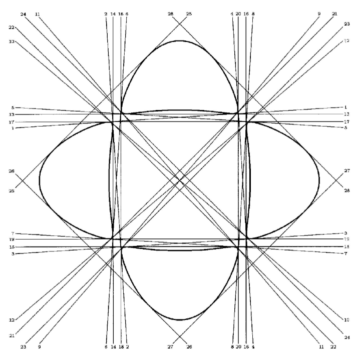


Abbildung 4: Ein Quartik mit 28 Doppeltangenten

2.3 Neilsche Parabel

Die Neilsche Parabel wird durch die Gleichung $x_1^3 - x_2^2 = 0$ erzeugt und ist somit eine Kubik. Eine Kubik ist die Nullstellenmenge eines Polynomes des dritten Grades. Parametrisieren kann man sie durch

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

Der **Tangentenvektor** ist gegeben durch $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$. Es gilt $\dot{\gamma}(0) = (0,0)$, oder anders gesehen ist $grad_0(x_1^3 - x_2^2) = (0,0)$, es handelt sich also um eine **Singularität**.

Beim Zeichnen der Kurve braucht man zwar nicht den Stift aufzuheben, aber die natürliche Handbewegung wird beim Punkt (0,0) unterbrochen, bzw. die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Kurve wird in dem Punkt gleich Null.

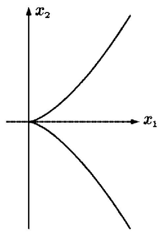


Abbildung 5: Neilsche Parabel

2.4 Newtonsche Knoten

Der Newtonsche Knoten hat die Gleichung $x_2^2 = x_1^3 + x_1^2$ und kann parametrisiert werden mit

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t - t^3)$$

Dies sieht man einfacher, wenn man die Gleichung umschreibt als

$$x_2^2 = x_1^2 \cdot (x_1 + 1)$$

Diese Kurve hat die Eigenart, dass sie einen **Schnittpunkt**, oder gewöhnlichen Doppelpunkt besitzt, einen Punkt den die Parametrisation zweimal abfährt, weshalb man solche Kurven als **Knoten** bezeichnet.

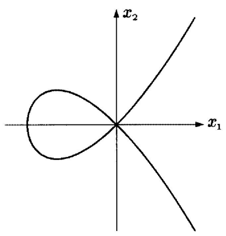


Abbildung 6: Newtonscher Knoten

Verallgemeinerung

Um sich auszumalen, wie der Graph einer Funktion der Form $x_2^2 = f(x_1)$ aussehen wird, muss man sich im Klaren sein, dass es drei Möglichkeiten für $f(x_1)$ zu beachten gibt: Ist $f(x_1)$ negativ, so gibt es keine Lösung, für die Nullstellen von $f(x_1)$ gibt es nur eine Lösung, und für jedes positive $f(x_1)$ gibt es zwei Lösungen, $\pm\sqrt{f(x_1)}$.

Dies impliziert, dass das Bild zur X-Axe symmetrisch ist, und dort die Quadratwurzel des positiven Teils von $x_2 = f(x_1)$ repräsentiert.

2.5 Cartesisches Blatt

Das Cartesische Blatt ähnelt dem Newtonschen Knoten, besitzt aber eine **Asymptote**. Die (übliche) Gleichung für das Cartesische Blatt ist

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0$$

Eine Asymptote bei algebraischen Gleichungen, ist wie bei Funktionen, eine Gerade die durch die Gleichung im Unendlichen angenähert wird. Um die Asymptote beim Cartesischen Blatt zu finden, ersetzt man x_2 durch die allgemeine Form der Asymptote $x_2 = (kx_1 + b)$.

$$x_1^3 + (kx_1 + b)^3 - 3x(kx_1 + b)$$

Ordnet man dieses Polynom nach den Potenzen von x_1 erhält man:

$$(k^3 + a)x_1^3 + 3k(bk - 1)x_1^2 + 3b(bk - 1)x_1 + b^3$$

Da dieses Polynom gleich $kx_1 + b$ sein muss, erhält man durch einen Koeffizientenvergleich $k = -1$ und $b = -1$.

Die Asymptote ist also $x_2 = -x_1 - 1$, bzw. $x_1 + x_2 + 1 = 0$

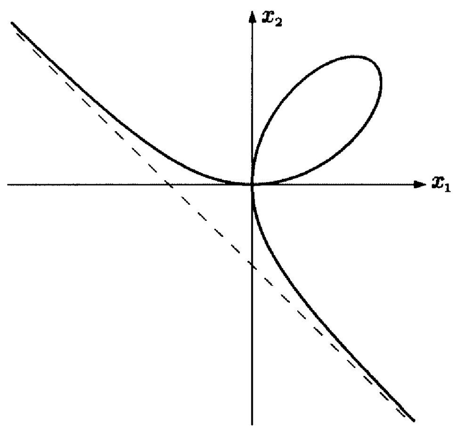


Abbildung 7: Cartesisches Blatt

Literatur

[1] Hungerbühler N., Kurs Grundlagen & Analysis III

[2] Brenner H., algebraische Kurven http://upload.wikimedia.org/wikiversity/de/9/9c/2009OsnaAlgKurv

[3] Fischer G., Ebene algebraische Kurven

[4] Gerhard J., http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurven3_1.htm

[5] Nunemacher J., http://math.huji.ac.il/ mbartzi/teaching/cubic-polynomials-Nunemacher.pdf

[6] Brenner H., http://upload.wikimedia.org/wikiversity/de/2/2a/ZahlentheorieOS2008Vorlesung10.pdf

[7] Brieskorn E. Knörrer H., Ebene algebraische Kurven

[8] http://www.answers.com/topic/asymptote