Ebene algebraische Kurven

Tangenten und Singularitäten

Meyrer Claudine

4. November 2010

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel, wird es hauptsächlich darum gehen, zu sehen wofür man die Schnittmultiplizität und den Satz von Bézout, die beide schon in Kapitel 2 (vgl. [1]) erwähnt wurden, gebrauchen kann. Wir werden uns zuerst nur auf die lokalen Eigenschaften von Kurven im $\mathbb{C}^2$ beschränken, und sie erst später auf den ganzen projektiven Raum erweitern.

1 Lokale Eigenschaften affin-algebraischer Kurven (in $\mathbb{C}^2$)

1.1 Definitionen

Definition 1. *Sei $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve, wobei $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ ein Minimalpolynom ist. C heisst **glatt** in einem Punkt $p \in C$, wenn gilt:*

$$grad_p(f) \neq (0, 0).$$

*Ist C nicht glatt in p, so ist C **singulär** in p.*

Es ist wichtig zu verlangen, dass $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ ein Minimalpolynom ist, weil sonst wäre C in jedem Punkt singulär.

Beispiel 1. *Sei $g = X_1^2 X_2^2$, also ist $grad_p(g) = (2X_1X_2^2, 2X_2X_1^2)$. Das passende Minimalpolynom ist $f = X_1X_2$.*
Der Punkt $p = (p_1, p_2)$ gehört zu $V(f)$ genau dann, wenn $p_1 = 0$ oder $p_2 = 0$.
Also ist für jedes $p \in C = V(f)$, $grad_p(g) = (0, 0)$ Also wäre jedes $p \in C$ eine Singularität.

Man kann dies auch anders interpretieren:
Gibt es $p \in V(f)$, so dass $\mathrm{grad}_p(f) \neq (0, 0) \Rightarrow f$ ist Minimalpolynom.

Definition 2. *Sei $C \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve, die glatt in p ist. Dann ist die **Tangente an C in p** definiert durch:*

$$T_pC = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}(p) \cdot x_2 = c \right\},$$

wobei c so zu wählen ist, dass p in T_pC liegt und es gibt genau eine solche Gerade.

Beispiel 2. *Die Neilsche Parabel,* $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^3 - x_2^2 = 0\}$ *besitzt eine Singularität im Punkt (0,0):*

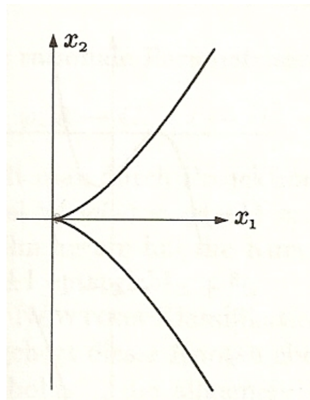

Abbildung 1: Neilsche Parabel

Beispiel 3. *Der Newtonsche Knoten* $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = x_1^2(x_1 + 1)\}$ *hat im Ursprung eine Singularität:*

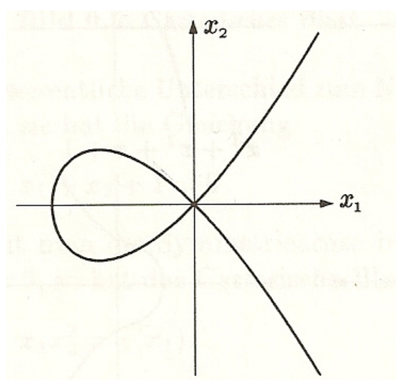

Abbildung 2: Newtonscher Knoten

1.2 Singularitäten

Natürlich stellt sich die Frage wie viele Singularitäten eine Kurve überhaupt besitzt. Der folgende Satz bringt uns der Antwort ein bisschen näher:

Satz 1. *Sei* $C = V(f) \in \mathbb{C}^2$ *eine algebraische Kurve, mit* $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ *ein Minimalpolynom. Dann besitzt C endlich viele Singularitäten.*

Beweis. Seien $C_1 := V(\frac{\partial f}{\partial X_1})$ und $C_2 := V(\frac{\partial f}{\partial X_2})$.
Dann ist für die Singularitätenmenge, Sing$C$:=$\{p \in C : C$ singulär in $p\}$:

$$\mathrm{Sing}C = C \cap C_1 \cap C_2.$$

Wir wollen also zeigen, dass Sing$C = C \cap C_1 \cap C_2$ eine endliche Menge ist. Es reicht zu zeigen, dass $C \cap C_1$ endlich ist. Wir gehen davon aus, dass deg$C \geq 2$, weil wenn C eine Gerade wäre, hätte C überhaupt keine Singularitäten. Daraus folgt, dass deg$C_1 \geq 1$. Somit ist C_1 eine algebraische Kurve.

Wir werden für den Beweis dieses Satzes den Satz von Bézout verwenden. Dazu müssen wir aber zuerst zeigen, dass C und C_1 keine gemeinsame Komponente besitzen. Dafür machen wir einen Widerspruchsbeweis:
Sei also g ein gemeinsamer Primfaktor von f und $\frac{\partial f}{\partial X_1}$:

$$f = g \cdot h \text{ und } \frac{\partial f}{\partial X_1} = g \cdot \tilde{h} = \frac{\partial g}{\partial X_1} \cdot h + g \cdot \frac{\partial h}{\partial X_1}.$$

Also gilt, dass g ein Teiler von $\frac{\partial g}{\partial X_1} \cdot h$ ist. Dann hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\frac{\partial g}{\partial X_1} \neq 0$: Dann ist g Teiler von h.
Das heisst $h = g \cdot h_1$, und deshalb ist $f = g^2 \cdot h_1$. Dies ist ein Widerspruch zu f ist Minimalpolynom.

2. Fall: $\frac{\partial g}{\partial X_1} = 0$: Dann ist $g = X_2 + c$. Wenn wir aber die Koordinaten von Anfang an so wählen, dass C keine achsenparallele Gerade enthält, dann ist dieser Fall überflüssig.

□

Aus diesem Satz folgt: deg$C$=n $\Rightarrow$ C hat höchstens $n(n-1)$ Singularitäten.

Da es nicht sehr interessant ist, Tangenten in glatten Punkten zu betrachten, stellt man sich die Frage wie wohl so eine Tangente in einem singulären Punkt aussieht. Die Antwort auf diese Frage wird erst später geliefert, allerdings ist die folgende Definition wichtig für das spätere Verständnis:

Definition 3. *Sei $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ und $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ fest gewählt. Dann kann man f schreiben als*

$$f(X_1, X_2) = \sum_k f_{(k)}, \quad \textit{wobei} \quad f_{(k)} = \sum_{\mu+\nu=k} a_{\mu\nu}(X_1 - p_1)^{\mu}(X_2 - p_2)^{\nu}$$

und

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\nu!} \cdot \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial X_1^{\mu} \cdot \partial X_2^{\nu}}(p).$$

*Dann ist die **Ordnung von f in p** definiert durch:*

$$ord_p(f) := min\{k : f_{(k)} \neq 0\}.$$

Analog definiert man die ***Ordnung von C in p****, für eine Kurve $C \subset \mathbb{C}^2$ und deren Minimalpolynom f:*

$$ord_p(C) := ord_p(f).$$

Eigenschaften der Ordnung von C in p.

a) $0 \leq \mathrm{ord}_p C \leq \deg C$,

b) $p \in C \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p C > 0$,

c) C glatt in $p \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p C{=}1$,

d) C singulär in $p \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p C > 1$.

Beispiel 4. *Sei C eine algebraische Kurve mit $deg(C) = n$. $ord_p C = n$, genau dann wenn $f = f_{(n)}$. $f_{(n)}$ ist homogen und kann deshalb wie folgt zerlegt werden:*

$$f_{(n)} = (b_1 X_1 - a_1 X_2) \cdot ... \cdot (b_m X_1 - a_m X_2)$$

Diese Faktoren haben alle die Potenz 1, weil f Minimalpolynom ist. Ausserdem gilt $m = n$, da die Summe der Potenzen gleich n sein muss (vgl. [1, Seite 23]). Da die Punkte (a_ν, b_ν) für $\nu = 1, ..., n$ alle verschieden sind, sind diese n Faktoren alle verschieden. Daraus folgt, dass die n Geraden, welche durch diese Faktoren beschrieben sind, verschiedene Steigungen $(a_\nu : b_\nu)$ haben, und deshalb besteht C aus n Geraden durch den Punkt p:

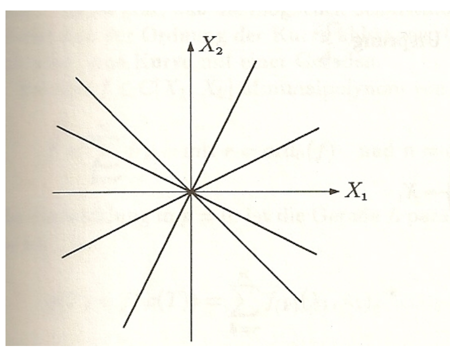

Abbildung 3: $\mathrm{ord}_p C = \deg(C)$

Beispiel 5. *Alle irreduziblen Kubiken besitzen die Ordnung 2 in singulären Punkten. Das kann man wie folgt zeigen:*

Sei C eine Kubik und $p \in C$ ein singulärer Punkt; $degC = 3$.
Mit den Eigenschaften a) und d) hat man, dass $3 = degC \geq ord_p C > 1$.
Weil C irreduzibel ist, kann C nicht aus 3 verschiedenen Geraden durch p bestehen, deshalb ist $ord_p C < degC$.
Daher gilt, dass $ord_p C = 2$.

Beispiel 6. *Das Ovoid* $C = V((X_1^2 + X_2^2)^2 - X_1^3)$ *besitzt im Ursprung die Ordnung 3.*

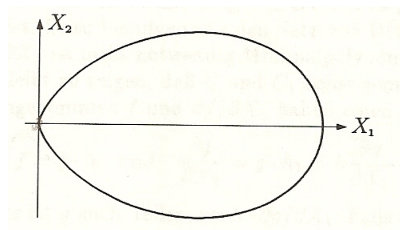

Abbildung 4: Ovoid

Wenden wir die obige Rechnung an, um die Ordnung herauszufinden:

$$
\begin{aligned}
f_{(0)} = \quad & f(0,0) = 0 \\
f_{(1)} = \quad & \underbrace{\frac{\partial f}{\partial X_1}(0,0)}_{=0} \cdot X_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial X_2}(0,0)}_{=0} \cdot X_2 \\
f_{(2)} = \quad & \tfrac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial {X_2}^2}(0,0)}_{=0} \cdot X_2^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(0,0)}_{=0} \cdot X_1 X_2 + \tfrac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial {X_1}^2}(0,0)}_{=0} \cdot X_1^2 \\
f_{(3)} = \quad & \tfrac{1}{6} \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial {X_2}^3}(0,0)}_{=12} \cdot X_2^3 + \tfrac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial X_1 \partial {X_2}^2}(0,0)}_{=0} \cdot X_1 X_2^2 + \tfrac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial {X_1}^2 \partial X_2}(0,0)}_{=0} \cdot X_1^2 X_2 \\
& + \tfrac{1}{6} \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial {X_1}^3}(0,0)}_{=-6} \cdot X_1^3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f_{(3)} = 2X_2^3 - X_1^3 \neq 0$

Also ist $ord_{(0,0)} f = ord_{(0,0)} C = 3.$

1.3 Schnittmultiplizität und Tangenten

In diesem Kapitel wird es darum gehen zu sehen, wie die Schnittmultiplizität zwischen zwei Kurven definiert ist. Wir wollen uns aber zunächst einem Spezialfall zuwenden, dem Schnitt zwischen einer Kurve und einer Geraden.

Sei $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ das Minimalpolynom von C, einer algebraischen Kurve, $\mathrm{ord}_p f = r$ und $\deg f = n$ und sei L eine Gerade. In Kapitel 2 haben wir gesehen wie die Schnittmultiplizität zwischen einer Kurve und einer Gerade beschrieben wird:

$$\mathrm{mult}_p(C \cap L) = \mathrm{ord}_p(g), (\mathrm{vgl.}[1, \mathrm{Seite}\ 25])$$

wobei $g(T) = f(\varphi(T)) = \sum_{k=r}^{n} f_{(k)}(\lambda_1, \lambda_2) T^k$ und $\varphi(T) = (\lambda_1 T, \lambda_2 T)$ die Parametrisierung von L ist.

Es gilt: Ist $C \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve und L eine Gerade durch den Punkt $p \in C$, dann ist:

$$\mathrm{ord}_p C \leq \mathrm{mult}_p(C \cap L).$$

Das bedeutet, dass der Schnitt einer Kurve und einer Geraden mit Multiplizität gezählt, grösser oder gleich die Ordnung der Kurve ist. Es gilt ausserdem, dass dies fast immer eine Gleichung ist, ausser für höchstens $\mathrm{ord}_p C$ Stück Geraden. Der Spezialfall, $\mathrm{mult}_p(C \cap L) = \infty$, gilt genau dann, wenn $p \in L \subset C$, und wird hier nicht weiter beachtet. Die folgende Definition soll verdeutlichen in welchen Fällen die obige Formel eine echte Ungleichung ist.

Definition 4. *Sei $C \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve, L eine Gerade, und $p \in C \cap L$. L ist* ***Tangente an C in p*** *genau dann, wenn*

$$\mathrm{ord}_p C < \mathrm{mult}_p(C \cap L).$$

Diese Definition ermöglicht also zum ersten, Tangenten in singulären Punkten zu definieren, und zum zweiten, da diese Ungleichung nur für höchstens $\mathrm{ord}_p C$ Stück Geraden gilt, eine Schranke für die mögliche Anzahl der Tangenten an die Kurve zu setzen.

Beispiel 7. *Sei die Quartik $V((X_1^2 + X_2^2)^2 + 3X_1^2 X_2 - X_2^3)$ das dreiblättrige Kleeblatt. Diese hat im Ursprung die Ordnung 3 (das kann man genau so nachrechnen wie oben beim Ovoid). Nach der obigen Bemerkung und der Definition 4, gilt also, dass es höchstens 3 Tangenten im Ursprung gibt. Es gilt sogar, dass es genau 3 Tangenten gibt:*

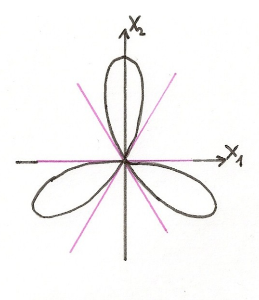

Abbildung 5: Dreiblättriges Kleeblatt

Definition 5. *Ist $r = ord_p(C)$, dann nennt man p einen* ***gewöhnlichen r-fachen Punkt****, genau dann wenn es r verschiedene Tangenten in p gibt.*

Der Ursprung des dreiblättrigen Kleeblattes ist also ein gewöhnlicher 3-facher Punkt.

Beim Ovoid ist der Ursprung kein gewöhnlicher Punkt. Hier gilt: Es gibt genau eine Tangente, die aber dreifach zu zählen ist.

Kommen wir nun zu einem nützlichen Lemma über die Darstellung der Gleichung von C, das hier nur schnell erwähnt wird, für die Polare und Hesse-Kurven aber sehr oft angewendet wird:

Lemma 1. *Sei $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ glatt in $p = (0,0)$ und $T = V(X_2)$ die Tangente an p. Sei $k := mult_p(C \cap T) < \infty$ die **Kontaktordnung**, dann ist*

$$f(X_1, X_2) = X_1^k g(X_1) + X_2 h(X_1, X_2)$$

mit $g(0) \neq 0$ und $h(0,0) \neq 0$.

Beweis Diese Aussage folgt direkt aus der Taylorentwicklung von f in p. □

Definition 6. *Sei T die Tangente an C in einem glatten Punkt p. Dann nennt man T*

- ***einfache Tangente**, wenn $mult_p(C \cap T) = 2$, und*
- ***Wendetangente**, wenn $mult_p(C \cap T) \geq 3$.*

*Im letzten Fall heisst p **Wendepunkt**. Ein Wendepunkt heisst **einfach**, wenn $mult_p(C \cap T) = 3$. Von einer **Doppeltangente** wird verlangt, dass sie in mindestens zwei verschiedenen glatten Punkten von C Tangente ist.*

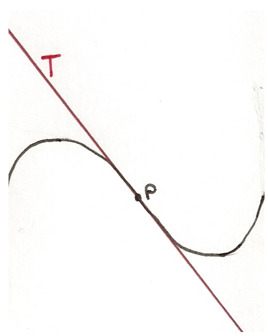

Abbildung 6: Wendetangente + Wendepunkt

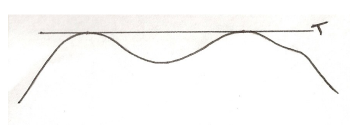

Abbildung 7: Doppeltangente

Wir wollen uns nun vom Spezialfall abwenden, und schauen wie die Schnittmultiplizität zwischen zwei Kurven errechnet werden kann.

Theorem 1. *Seien C_1 und $C_2 \subset \mathbb{C}^2$ algebraische Kurven, ohne gemeinsame Komponente und $p \in C_1 \cap C_2$. Dann gilt:*

$$\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) \geq \mathrm{ord}_p C_1 \cdot \mathrm{ord}_p C_2.$$

Dies ist genau dann eine Gleichung, wenn die beiden Kurven keine gemeinsame Tangente besitzen.

Dieses Theorem wird erst in Kapitel 8 (vgl. [1, Seite 122]) bewiesen.

Beispiel 8. *Seien die zwei Neilschen Parabeln:*

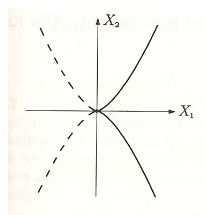

Abbildung 8: Neilsche Parabeln

Diese zwei Parabeln haben die X_1-Achse als gemeinsame Tangente. Wegen Theorem 1, ist die Schnittmultiplizität im Ursprung grösser als $ord_p C_1 \cdot ord_p C_2$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass beide Kurven im Ursprung die Ordnung 2 haben, also ist $mult_p(C_1 \cap C_2) > 4$. Wenn man nun die beiden Parabeln mit kleinen Störungen versieht, ändern sich zwar die Kurven ein wenig, allerdings hat dies keinen Einfluss auf die Schnittmultiplizität; im Gegensatz es hilft uns zu verstehen wieso die Schnittmultiplizität gleich 6 ist:

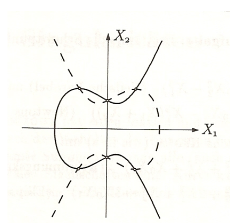

Abbildung 9: Neilsche Parabeln mit kleinen Störungen

2 Globale Eigenschaften algebraischer Kurven in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Wir werden uns im Folgenden im projektiven Raum bewegen, also von den lokalen zu den globalen Eigenschaften algebraischer Kurven übergehen.

Zunächst kommen wir zu einer wichtigen Formel, um die Eigenschaften aus $\mathbb{C}^2$ zu generalisieren.

Formel von Euler. Sei $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ homogen vom Grad n. Dann gilt:

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} = n \cdot F.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2. *Sei C=V(F) $\subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine algebraische Kurve, wobei F ein Minimalpolynom ist, und sei $p \in C$. Dann ist C glatt in p, wenn*

$$grad_p F = \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}(p), \frac{\partial F}{\partial X_1}(p), \frac{\partial F}{\partial X_2}(p) \right) \neq (0,0,0).$$

Ausserdem gilt:
Ist C glatt in p, so ist die projektive Tangente T_pC in p gegeben durch die lineare Gleichung

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(p) + X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1}(p) + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}(p) = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass eine algebraische Kurve $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ nur endlich viele Singularitäten besitzt. Im Fall wo C eine irreduzible Kurve ist, gilt sogar:

Satz 2. *Sei $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine irreduzible algebraische Kurve vom Grad n. Dann besitzt C höchstens*

$$\gamma(n) := \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Singularitäten.

Für den Beweis dieses Satzes, benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 3. *Durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ geht mindestens eine algebraische Kurve vom Grad $\leq n$.*

Beweisidee. Sei

$$V_n = \{ \sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=n} a_{\nu_0\nu_1\nu_2} X_0^{\nu_0} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \mid a_{\nu_0\nu_1\nu_2} \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$$

der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in drei Variablen. Dann ist zu zeigen:

$$\dim V_n = \binom{n+2}{n}.$$

Dann definieren wir die folgende Äquivalenzrelation auf V_n: Für $P_1, P_2 \in V_n$ gilt:

$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow P_1 = \lambda \cdot P_2, \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Also ist die Menge dieser Äquivalenzklassen ein projektiver Raum

$$\mathbb{P}_{\binom{n+2}{n}-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\binom{n+2}{n}}/_{\sim} \cong V_n$$

Es gilt: $\binom{n+2}{n} - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$.

Also geht durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ mindestens eine algebraische Kurve vom Grad $\leq n$, da die Punkte aus $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{P}_{\binom{n+2}{n}-1}(\mathbb{C})$ Hyperebenen definieren, und diese sich in mindestens einem Punkt schneiden. □

Beweis vom Satz 2. Da $\gamma(1) = \gamma(2) = 0$, können wir annehmen, dass $n \geq 3$ ist.

Wir machen einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen also an, dass C $\gamma(n)+1$ Singularitäten besitzt. Wir nehmen noch $n-3$ Punkte dazu, dann sind es insgesamt

$$\gamma(n) + 1 + n - 3 = \frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

Punkte.

Wegen Lemma 3, können wir hier eine Kurve C' vom Grad $m \leq n-2$ finden, die durch diese $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Punkte geht.

Da $\mathrm{mult}_p(C \cap C') \geq 2$ für die $\gamma(n)+1$ Singularitäten von C, und $\mathrm{mult}_p(C \cap C') \geq 1$ für die restlichen $n-3$ Punkte von C, ist

$$\sum_{p \in C \cap C'} \mathrm{mult}_p(C \cap C') \geq 2(\gamma(n)+1) + n - 3 = n(n-2) + 1. \qquad (1)$$

Da C irreduzibel ist und $\deg C' \leq n$, kann C keine Komponente von C' sein. Daher kann man den Satz von Bézout anwenden:

$$\sum_{p \in C \cap C'} \mathrm{mult}_p(C \cap C') = n \cdot m \leq n(n-2).$$

Diese Ungleichung steht allerdings im Widerspruch zu (1). □

Aus diesem Satz folgt

Korollar 1. *Eine beliebige algebraische Kurve $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ vom Grad n besitzt höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Singularitäten.*

Wir haben also eine bessere Schranke für die Anzahl der Singularitäten einer beliebigen algebraischen Kurve gefunden wie im Satz 1.

Sei hier noch kurz ein Satz erwähnt über die Tangenten in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, der aber erst in Kapitel 8 (vgl. [1, Seite 115]) bewiesen wird:

Satz 3. *Sei $p \in C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ und $L \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine Gerade. L ist genau dann Tangente an C in p, wenn es eine gegen p konvergente Folge von glatten Punkten $p_\nu \subset C$ gibt, mit*

$$L = \lim_{\nu \to \infty} T_{p_\nu} C.$$

3 Literatur

Literatur

[1] G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven.*