Polaires et courbes hessiennes

Emilie Morel

29 octobre 2010

1 Motivation

Cet exposé s'intéresse à la manière de trouver les tangentes et les points d'inflection des courbes algébriques dans l'espace projectif de $\mathbb{C}$. Nous verrons que la technique consiste à couper la courbe algébrique C avec d'autres courbes, en l'occurence les polaires et les courbes hessiennes. Ainsi, nous pourrons utiliser le théorème de Bézout pour calculer le nombre de tangentes et de points d'inflection.

2 Polaires

2.1 Définitions

Pour pouvoir définir ce qu'est une polaire, nous avons tout d'abord besoin de rappeler la notion de tangente :

Soit $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et $p \in C$ un point lisse, c'est-à-dire $grad_p F \neq (0,0,0)$ pour F le polynôme minimal de C, alors l'espace tangent à C dans le point p, écrit T_pC, se résume à une tangente donnée par l'équation

$$\sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0.$$

Donc un point $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ quelconque appartient à T_pC, s'il satisfait l'équation

$$\sum_{i=0}^{2} q_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0.$$

Ainsi on peut voir que $p \in V\left(\sum_{i=0}^{2} q_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\right)$.
Motivé par l'équation précédente, on peut formuler la définition suivante :

Définition 2.1.1 *Soit $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique avec F son polynôme minimal de degré ≥ 2. Soit $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ quelconque.*
On définit

$$D_qF := q_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + q_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}.$$

Alors $deg(D_qF) \geqslant 1$ et on appelle $P_qC := V(D_qF)$ la polaire de C selon le pôle q.

Pour motiver la suite de cet exposé, regardons un exemple :

2.2 Exemple

Parabole de Neil

Soit C la parabole de Neil avec $F = X_2^3 + X_0X_1^2 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$.
Alors $D_qF = q_0X_1^2 + 2q_1X_0X_1 + 3q_2X_2^2$.
Prenons $p = (1 : 0 : 0)$ le point dans lequel C a la tangente $T = V(X_1)$ (toujours possible grâce à un changement de coordonnées !). Le but est de trouver la multiplicité de l'intersection $C \cap P_qC$ en p. Pour cela, on va distinguer des cas selon la position du pôle q :

Cas 1 : $q_1 = 0$, donc $q \in V(X_1)$.
Comme c'est plus intéressant de prendre $p \neq q$, posons $q_2 \neq 0$.
Donc $D_qF = 3q_2X_2^2 \in \mathbb{C}[X_2]$.

$$R_{C,P_qC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 \\ 3q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 27q_2^3X_0^2X_1^4.$$

Alors $mult_p(C \cap P_qC) = 4$.

Cas 2 : $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$, i.e. $q \in V(X_2)$.
Donc, $D_qF = q_0X_1^2 + 2q_1X_0X_1 = X_1(q_0X_1 + 2q_1X_0) \in (\mathbb{C}[X_0])[X_1]$.
Alors P_qC est composé de deux droites : $V(X_1)$ et $V(q_0X_1+2q_1X_0)$ qui passe par $(0 : 0 : 1)$.
Et

$$R_{C,P_qC} = \begin{vmatrix} X_0 & 0 & X_2^3 & 0 \\ 0 & X_0 & 0 & X_2^3 \\ q_0 & 2q_1X_0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & 2q_1X_0 & 0 \end{vmatrix} = 4q_1^2X_0^3X_2^3 + q_0^2X_2^6 = X_2^3(4q_1^2X_0^3 + q_0^2X_2^3).$$

Alors $mult_p(C \cap P_qC) = 3$.

Cas 3 : $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$
Alors, $D_qF = X_2^2 + X_1(q_0X_1 + 2q_1X_0) \in (\mathbb{C}[X_0, X_1])[X_2]$, et P_qC est une parabole tangente en p.
De plus :

$$R_{C,P_qC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 \\ 1 & 0 & X_1(q_0X_1 + 2q_1X_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X_1(q_0X_1 + 2q_1X_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_1(q_0X_1 + 2q_1X_0) \end{vmatrix} =$$

$$(X_0X_1^2)^2 + (q_0X_1^2 + 2q_1X_0X_1)^3 = X_0X_1^4 + 8q_1^3X_0^3X_1^3 = X_1^3(X_0X_1 + 8q_1^3X_0^3).$$

Donc, $mult_p(C \cap P_qC) = 3$, car $q_1 \neq 0$.

2.3 Propriétés

Nous pouvons formuler des premières propriétés de la polaire :

Proposition 2.3.1 *Soit $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ une courbe algébrique, F son polynôme minimal avec $deg(F) = n$ et soit $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Alors :*

a) *La polaire P_qC ne dépend pas du choix des coordonnées.*

b) *$D_qF = 0 \Longleftrightarrow C$ est constituée de n droites qui passent par q.*

c) *$deg(D_qF) = n - 1$, si $D_qF \neq 0$.*

d) *C et P_qC ont une composante commune $\Longleftrightarrow C$ contient une droite qui passe par q.*

e) *Si $p \in C$ est singulier et $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ quelconque, alors $p \in P_qC$.*

Preuve :

a) On veut voir que la polaire ne dépend pas des coordonnées. Donc prenons un point $q = (q_0, q_1, q_2)$ dans une première base et choisissons une matrice de changement de base $A = (a_{ij})_{ij} \in PGL(3; \mathbb{C})$ qui envoie q sur e_1, i.e.

$$A \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_{00}q_0 + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 = 1 = q'_0. \qquad \circledast$$

De plus, en ce qui concerne la variable (x_0, x_1, x_2) :

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x'_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2,$$

une fonction par rapport à des indéterminés x_i.
On peut alors appliquer la règle de la chaîne et avec $\circledast$, on obtient :

$$D_{q'}F = \sum_{i=0}^{2} q'_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} = q'_0 \frac{\partial F}{\partial x'_0} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_0}.$$

Maintenant, soit $B = A^{-1}$, ainsi :

$$x_i = b_{i0}x'_0 + b_{i1}x'_1 + b_{i2}x'_2.$$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_0} = \sum_{i=0}^{2} b_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Alors les racines des polynômes associés aux polaires avant et après le changement de base sont les mêmes.

b)" $\Rightarrow$ " : Soit $D_qF = 0$ pour $q = (1 : 0 : 0)$. Ainsi F ne dépend pas de X_0.
On peut écrire $F(1, X_1, X_2) = f(X_1, X_2) = f_{(0)} + f_{(1)} + ... + f_{(n)}$ en parties homogènes, et

comme F ne dépend pas de X_0,

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^n f_{(0)} + X_0^{n-1} f_{(1)} + ... + X_0 f_{(n-1)} + f_{(n)} = f_{(n)}.$$

Comme $f = f_{(n)}$, alors $ord_q(f) = n = ord_q(C) = deg(C)$. C est donc composée de n droites différentes passant par q.

"$\Leftarrow$" : C est composé de n droites différentes passant par $q = (1 : 0 : 0)$. Alors $n = deg(C) = ord_q(C)$ et $F[X_0, X_1, X_2] = f_{(n)}(X_1, X_2)$. Donc $D_q F = 0$.

c) Clair par la définition de $D_q F$.

d) "$\Rightarrow$" : Supposons que C et $P_q C$ ont une composante commune. Par le lemme de Study, les polynômes minimaux associés ont un facteur premier commun. Alors $F = G \cdot H$ et $D_q F = G \cdot \tilde{H}$.
Donc,

$$D_q F = q_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + q_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} =$$
$$q_0 \frac{\partial G}{\partial X_0} H + q_0 G \frac{\partial H}{\partial X_0} + q_1 \frac{\partial G}{\partial X_1} H + q_1 G \frac{\partial H}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial G}{\partial X_2} H + q_2 G \frac{\partial H}{\partial X_2}.$$

Donc G divise $q_0 \frac{\partial G}{\partial X_0} H, q_1 \frac{\partial G}{\partial X_1} H$ et $q_2 \frac{\partial G}{\partial X_2} H$. Ainsi, il faut que $\frac{\partial G}{\partial X_0} = \frac{\partial G}{\partial X_1} = \frac{\partial G}{\partial X_2} = 0$.
$\Rightarrow V(G)$ est une droite.
$\Rightarrow C$ contient une droite passant par q.

"$\Leftarrow$" :
C contient une droite, alors $F = G \cdot X_2$, où $V(X_2)$ est une droite qui passe par q. Alors :

$$D_q F = q_0 \frac{\partial G}{\partial X_0} \cdot X_2 + q_1 \frac{\partial G}{\partial X_1} \cdot X_2 + q_2 \frac{\partial G}{\partial X_2} \cdot X_2 + q_2 \cdot G = X_2 \cdot H,$$

comme q appartient à $V(X_2)$.
Donc C et $P_q C$ ont une composante commune.

e) Comme p est singulier, $grad_p F = 0$. Alors $p \in P_q C$. □

2.4 Conséquences

Avec les propriétés que nous avons énumérées dans la section précédente, nous pouvons formuler le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit $C = V(F)$ une courbe algébrique de degré $n \geq 2$ qui ne contient pas de droites et $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ quelconque.*
• *Alors la polaire $P_q C$ est une courbe algébrique de degré $\leq$ n-1, qui n'a pas de composantes*

communes avec C.
• *L'intersection $C \cap P_qC$ est composée des points de tangence à C par le point q et des singularités de C.*

Par le théorème de Bézout que l'on peut appliquer à $C \cap P_qC$, car ce sont des courbes algébriques dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sans composantes communes, il y a au plus $n(n-1)$ tangentes à C par q. Mais ce nombre compte les tangentes doubles, les points d'inflection et les singularités. Pour plus de précision, on peut formuler cette proposition :

Proposition 2.4.1 *On suppose que C a une tangente simple T en p, i.e. $mult_p(T \cap C) = 2$. Soit $q \in T$, $q \neq p$. Alors P_qC est transversal à C dans p, i.e. $mult_p(P_qC \cap C) = 1$. En particulier, la polaire est lisse dans p.*

Preuve :
Pour pouvoir exprimer le polynôme minimal F , prenons $p = (1:0:0)$ et $T = V(X_2)$ la tangente à C en p (toujours possible grâce à un changement de coordonnées). Donc $q_1 \neq 0$ et $q_2 = 0$
Ainsi
$$F = X_1^2 G(X_0, X_1) + X_2 H(X_0, X_1, X_2) \quad \text{avec} \quad 2 = mult_p(C \cap T),$$
tel que $G(1,0) \neq 0$ et $H(1,0,0) \neq 0$.
Regardons si C et P_qC sont lisses dans p :

Tout d'abord concentrons-nous sur C. Il faut qu'on trouve une dérivée partielle différente de 0 en p. C'est la cas, car :
$$\frac{\partial F}{\partial X_2} = X_2 \frac{\partial H}{\partial X_2} + H(X_0, X_1, X_2) \neq 0 \quad \text{en} \quad p.$$
Donc $grad_p F \neq (0,0,0)$.

Maintenant, regardons si D_qF est lisse en p. Commençons par calculer D_qF :
$$D_qF = q_0 X_1^2 \frac{\partial G}{\partial X_0} + q_0 X_2 \frac{\partial H}{\partial X_0} + 2q_1 X_1 G(X_0, X_1) + q_1 X_1^2 \frac{\partial G}{\partial X_1} + q_1 X_2 \frac{\partial H}{\partial X_1}.$$
Il faut trouver une dérivée partielle différente de 0 en p . C'est le cas de ce terme qui apparaît dans la dérivée partielle par rapport à X_1 :
$$\frac{\partial D_qF}{\partial X_1} = 2q_1 G(X_0, X_1) + 2q_1 X_1 \frac{\partial G}{\partial X_1} + ... \neq 0.$$
Donc, $grad_p D_qF \neq (0,0,0)$.
Ainsi C et P_qC sont lisses dans p.

On peut alors calculer la multiplicité grâce à l'ordre, puisque P_qC et C n'ont ni composantes, ni tangentes communes :

$$mult_p(C \cap P_qC) = ord_p(C) \cdot ord_p(P_qC) = 1.$$

$\square$

Corollaire 2.4.1 *Si C est une courbe algébrique de degré n et $q \notin C$, alors presque toutes les droites qui passent par q ont exactement n points d'intersection simples avec C.*

Preuve :
On sait que l'ensemble des points d'intersection de $C \cap P_qC$ est composé des points de tangence des tangentes de C par q et des singularités de C et cet ensemble est fini.
Donc toutes les droites qui passent par q et qui passent pas par $C \cap P_qC$ satisfont le corollaire. $\square$

3 Courbes hessiennes

3.1 Motivation

Quand on souhaite étudier les inflections d'une courbe, nous avions l'habitude de manière naïve d'étudier les dérivées secondes des courbes. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les inflections des courbes algébriques planes au moyen des courbes hessiennes. C'est un concept qui intègre effectivement les dérivées secondes.

3.2 Définitions

Définition 3.2.1 *Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$:*
(a) *La matrice hessienne de F est définie par*

$$H_F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{0 \leq i,j \leq 2}.$$

(b) *Si $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ est homogène de degré ≥ 2 et le polynôme minimal de $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ tel que $deg(detH_F) \geq 1$, alors on appelle $H(C) := V(detH_F)$ la courbe hessienne de C.*

Pour ne pas devoir calculer toutes les dérivées secondes de la matrice hessienne, il existe d'autres formules pour calculer ce déterminant. C'est pourquoi, nous pouvons regarder le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Soit $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ homogène de degré n, $F_i = \frac{\partial F}{\partial X_i}$ et $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}$, alors*

$$det(H_F) = \frac{n-1}{X_0} \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{n-1}{X_0^2} \begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

Preuve : Commençons par la première égalité :

On applique la formule de Euler à F_i :

$$X_0 \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_0} + X_1 \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_1} + X_2 \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_2} = X_0 F_{i0} + X_1 F_{i1} + X_2 F_{i2} = (n-1) F_i$$

Grâce aux opérations élémentaires du déterminant, on a que :

$$det(H_F) = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} & F_{20} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{X_0} \begin{vmatrix} X_0 F_{00} & X_0 F_{10} & X_0 F_{20} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}.$$

Puis on ajoute X_j fois la j-ème ligne à la première :

$$det(H_F) = \frac{1}{X_0} \begin{vmatrix} X_0F_{00} + X_1F_{01} + X_2F_{02} & X_0F_{10} + X_1F_{11} + X_2F_{12} & X_0F_{20} + X_1F_{21} + X_2F_{22} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{X_0} \begin{vmatrix} (n-1)F_0 & (n-1)F_1 & (n-1)F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{(n-1)}{X_0} \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}.$$

Pour prouver la deuxième égalité, on reprend le résultat obtenu ci-dessus et on applique les mêmes étapes, aux colonnes cette fois. Donc

$$det(H_F) = \frac{n-1}{X_0} \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{(n-1)}{X_0^2} \begin{vmatrix} X_0F_0 & F_1 & F_2 \\ X_0F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ X_0F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n-1)}{X_0^2} \begin{vmatrix} X_0F_0 + X_1F_1 + X_2F_2 & F_1 & F_2 \\ X_0F_{01} + X_1F_{11} + X_2F_{21} & F_{11} & F_{21} \\ X_0F_{02} + X_1F_{12} + X_2F_{22} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{(n-1)}{X_0^2} \begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}.$$

□

3.3 Propriétés

Avec les définitions que nous avons déjà vues, nous pouvons déjà formuler les points suivants :

Proposition 3.3.1 ***a)*** *La courbe hessienne $H(C)$ de C ne dépend pas des coordonnées.*
b) $deg(det(H_F)) = 3(n-2)$.
c) $Sing(C) \subset H(C)$.

Preuve :
a) La preuve se fait sur le même principe que le point 2.3.1.a).

b) Soit F de degré n. Alors $deg(F_{ij}) = (n-2)$, et donc $det(H_F)$ satisfait l'affirmation.

c) p est singulier, donc les dérivées secondes valent 0, de même que $det(H_F)$. □

3.4 Conséquences

La concept des courbes hessiennes nous permet de formuler le théorème suivant sur les points d'inflections d'une courbe :

Théorème 3.4.1 *Soit $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ une courbe qui ne contient pas de droites, alors :*
a) *Un point lisse p est un point d'inflection $\Leftrightarrow p \in H(C)$.*
b) $det(H_F) \neq 0$.
c) *C et $H(C)$ n'ont pas de composantes communes.*
d) *Pour $p \in C$ un point d'inflection simple, $mult_p(C \cap H(C)) = 1$.*

Preuve :
a) Soit $p = (1:0:0)$ lisse pour C avec la tangente $T = V(X_2)$ et $k = mult_p(C \cap T)$ fini. Alors $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$ peut être représenté dans la forme

$$f(X_1, X_2) = X_1^k g(X_1) + X_2 h(X_1, X_2)$$

où $g(0) \neq 0$ et $h(0,0) \neq 0$.
On peut écrire :

$$X_1^k g(X_1) = X_1^k(c_0 + c_1X_1 + c_2X_1^2 + \cdots) = a_2X_1^2 + a_3X_1^3 + a_4X_1^4 + \cdots$$

et $a_2 \neq 0$ pour $k = 2$ et $a_2 = 0$ pour $k \geq 3$

$$h(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots \quad \text{avec} \quad b_0 \neq 0$$

$\Rightarrow f(X_1, X_2) = a_2X_1^2 + a_3X_1^3 + \cdots + X_2(b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots)$
avec $a_2 = 0$, si $k \geq 3$, c'est-à-dire si p est un point d'inflection.
Avec le lemme 3.2.1, on peut dire que

$$det(H_f(p)) = (n-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 2a_2 & b_1 \\ b_0 & b_1 & 2b_2 \end{vmatrix} = -(n-1)^2 \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & 2a_2 & 0 \\ 2b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = -2(n-1)^2 b_0^2 a_2$$

Comme $b_0 \neq 0$, $det(H_F(p)) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$
Donc $p \in H(C) \Leftrightarrow det(H_F(p)) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0 \Leftrightarrow k \geq 3 \Leftrightarrow p$ est un point d'inflection.

b) Il suffit de montrer qu'il existe un point lisse p qui n'est pas un point d'inflection.
On suppose que $det(H_F) = 0$. Donc $V(det(H_F)) = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et tous les points dans C sont des points d'inflection d'après a).

On utilise le théorème des fonctions implicites de la partie 6.9 :
Soit $p = (p_1, p_2) \in C$ lisse, donc $grad_pF \neq 0$ et $F(p) = 0$.
D'après ce théorème, $\exists$ un voisinage ouvert U dans $\mathbb{C}^2$ de p et $\exists$ un voisinage ouvert V dans $\mathbb{C}$ de p_1, $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$ continûment différentiable t.q. $\{(x_1, x_2) \in U | f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, \varphi(x_1)) | x_1 \in V\}$
Donc, si $p \in (C \cap U) = \{(x_1, x_2) \in U | \varphi(x_1) = x_2\}$ est un point d'inflection, alors $\varphi''(p_1) = 0$.
On a supposé qu'il n'existait que des points d'inflection, alors $\varphi'' = 0$ et $\varphi = ax_1 + b$.
Alors $(C \cap U) = \{(x_1, x_2) \in U | x_2 - ax_1 - b = 0\}$ et soit $L := V(x_2 - ax_1 - b)$.
$\sharp(L \cap C) = \infty \Rightarrow L \subset C$. Ceci est une contradiction, car C ne contient pas de droites.
Donc tous les points lisses ne sont pas des points d'inflection.

c) Soit $p = (1 : 0 : 0) \in$ C lisse avec la tangente $T = V(X_2)$ et $mult_p(C \cap T) = k \geq 2$, $k < \infty$.

On coupe $H(C)$ et C avec T. Ainsi si $H(C)$ et C avaient une composante commune dans un point lisse p, on aurait $mult_p(H(C) \cap T) = mult_p(C \cap T)$.

D'abord

$$det(H_F) = X_1^{k-2}\tilde{G}(X_0, X_1) + X_2\tilde{H}(X_0, X_1, X_2) \quad \text{avec} \quad \tilde{G}(1, 0) \neq 0.$$

On coupe maintenant $H(C)$ avec $T = V(X_2) \Rightarrow X_2 = 0$ dans $det(H_F)$.
Alors

$$det(H_F) = X_1^{k-2}\tilde{G}(X_0, X_1) \quad \text{et} \quad det(H_F)(p) = 0$$

$\Rightarrow H(C)$ et T se coupe en p et $mult_p(H(C) \cap T) = k - 2$, car $\tilde{G}(1, 0) \neq 0$.
Donc $mult_p(H(C) \cap T) = k - 2 < mult_p(C \cap T) = k, k < \infty$, car C ne contient pas de droites par hypothèse. Alors C et $H(C)$ n'ont pas de composantes communes.

d) p un point d'inflection simple $\Rightarrow mult_p(C \cap T) = 3 = k$, T la tangente à C dans p $\Rightarrow p$ est lisse dans C.
De plus, $mult_p(H(C) \cap T) = k - 2 = 1$ (voir preuve pt c)), donc T n'est pas tangente à $H(C)$ dans p.
Comme $H(C)$ et C n'ont pas de composantes communes, ni de tangentes communes :
$mult_p(H(C) \cap C) = ord_p(H(C)) \cdot ord_p(C) = 1 \cdot 1 = 1$. □

Corollaire 3.4.1 *Une courbe algébrique $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de degré ≥ 2 qui ne contient pas de droites, possède, au plus, $3n(n-2)$ points d'inflection.*

Preuve :
$deg(C) = n$ et $deg(H(C)) = 3(n-2)$ (par prop. 3.3.1)
Le théorème de Bézout nous donne le nombre de points d'inflection :

$$\sum_{p \in H(C) \cap C} mult_p(C \cap H(C)) = 3n(n-2)$$

si ce sont des points d'inflection simples, $<$ sinon. □

Proposition 3.4.1 *$C \subset H(C) \Leftrightarrow C$ est la réunion de droites.*
On peut également le formuler ainsi :
a) *C contient une droite L, alors $L \subset H(C)$*
b) *Soit $C' \subset C$ une composante irréductible avec $C' \subset H(C)$, alors C' est une droite.*

Preuve :
a) Soient $C = V(F)$, où $F = X_0 G$, et la droite $L = V(X_0)$, ainsi $C = L \cup V(G)$ et on a bien que C contient une droite.
Alors $F_i = X_0 G_i$ et $F_{ij} = X_0 G_{ij}$, $i = 1, 2$.
D'après le lemme 3.2.1 :

$$det(H_F) = \frac{n-1}{X_0^2} \begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} \Leftrightarrow X_0^2 det(H_F) = (n-1) \begin{vmatrix} nX_0G & X_0G_1 & X_0G_2 \\ (n-1)X_0G_1 & X_0G_{11} & X_0G_{21} \\ (n-1)X_0G_2 & X_0G_{12} & X_0G_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_0^2 det(H_F) = X_0^3(n-1) \begin{vmatrix} nG & G_1 & G_2 \\ (n-1)G_1 & G_{11} & G_{21} \\ (n-1)G_2 & G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} =: X_0^3 \cdot \triangle$$

$\Rightarrow det(H_F) = X_0 \cdot \triangle$
Donc $H(C) = V(det(H_F)) = V(X_0) \cup V(\triangle) = L \cup V(\triangle) \Rightarrow L \subset H(C)$.

b) Il faut montrer qu'une composante non-linéaire $C' \subset C$ ne peut pas être une composante de $H(C)$. Quand on l'aura montrer, les droites ne pourront plus qu'être alors les composantes communes. Pour faire cela, on choisit donc un point p qui est lisse dans C' et $H(C)$, où C' est irréductible et non-linéaire.

On fait la même preuve que la preuve du théorème 3.4.1 c) : On obtient que : Comme $C' \subset C$ et $C' \subset H(C) \Rightarrow k-2=k$, ce qui est seulement possible pour $k=\infty$. Mais c'est une contradiction à $mult_p(C' \cap T) < \infty$.
Donc, C' n'est pas une composante non-linéaire, et C' est une droite. □

3.5 Exemple

Parabole de Neil
Soit $C_N = V(F)$ avec le polynôme minimal $F = X_1^3 - X_0X_2^2$. Alors

$$det(H_F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2X_2 \\ 0 & 6X_1 & 0 \\ 2X_2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6X_1 & 0 \\ 2 & 0 & 2X_2 \end{vmatrix} = -24X_1X_2^2$$

et $H(C) = V(-24X_1X_2^2) = V(X_1) \cup V(X_2)$,
où $V(X_2)$ est compté deux fois, comme X_2 est un zéro double du déterminant.
Pour trouver les points d'inflection, il faut couper C et $H(C)$:

On veut d'abord trouver les points d'intersection de C et $V(X_2)$, qui correspondent aux zéros de $G(Y_0, Y_1) = F(Y_0, Y_1, 0) = Y_1^3$.
On peut factoriser G par le théorème fondamental de l'algèbre homogénéisé :

$$G = (b_1Y_0 - a_1Y_1)^{k_1} \cdot \ldots = (0Y_0 - (-1)Y_1)^3.$$

Alors $(a_1 : b_1 : 0) = (-1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0) = p$, le point d'intersection de C et de $V(X_2)$ et $mult_p(C \cap V(X_2)) = 3$.

Maintenant, on cherche les points d'intersection entre C et $V(X_1)$:

$$G = F(Y_0, 0, Y_2) = -Y_0Y_2^2 = -(1Y_0 + 0Y_2)^1(0Y_0 + 1Y_2)^2$$

$\Rightarrow q = (0 : 0 : 1)$ et $p = (1 : 0 : 0)$ sont les points d'intersection avec respectivement $mult_q(C \cap V(X_1)) = 1$ et $mult_p(C \cap V(X_1)) = 2$.

Maintenant, il faut déterminer si les points d'intersection sont des points d'inflection ou des singularités de C :

$$gradF = (-X_2^2, 3X_1^2, -2X_0X_2)$$

$$grad_p F = (0,0,0)$$

$$grad_q F = (-1,0,0)$$

$\Rightarrow C$ est lisse en q et singulier en p
$\Rightarrow q$ est un point d'inflection et p est une singularité.
Enfin $mult_p(C \cap H(C)) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$, car p est une triple intersection de $V(X_2)$ qui compte double et une double intersection de la droite $V(X_1)$.

Références

[1] G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg