

# Courbes duales et Formules de Plücker

Christelle Vuignier

23 décembre 2010

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rappels</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>La bidualité d'une courbe</b>	<b>2</b>
3.1	Invariants numériques . . . . .	2
3.2	Preuve de $C = C^{**}$ . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Les courbes de Plücker</b>	<b>5</b>
4.1	Deux types de singularités . . . . .	6
4.2	Les formules de Plücker . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Preuve des formules de Plücker</b>	<b>9</b>

# 1 Motivation

Le but de cet exposé est d'introduire les formules de Plücker. Celles-ci présentent des relations entre certains invariants d'une courbe algébrique de Plücker  $C$  et ceux de sa courbe duale  $C^*$ . Les courbes de Plücker sont particulières car leurs singularités consistent seulement en des points de rebroussement simples ou en des doubles points simples.

De plus, ces formules nous permettent de calculer le nombre de double tangentes, et de points d'inflexion dans une courbe de Plücker.

Avant de traiter les courbes de Plücker, nous montrons qu'en dualisant deux fois une courbe algébrique  $C$ , nous obtenons à nouveau la même courbe, i.e.  $C = C^{**}$ . Ce résultat intervient dans la preuves des formules de Plücker.

Nous commençons par quelques rappels.

## 2 Rappels

Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une courbe algébrique. Sa courbe duale est donnée par

$$C^* = \{L \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}) \text{ tel que } L \text{ est une tangente à } C \text{ en } p \in C\}.$$

Dans l'exposé précédent, plusieurs propriétés de  $C^*$  ont été démontrées. Plus précisément, nous avons vu le théorème suivant.

**Théorème 2.1** *Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une courbe algébrique sans droite comme composante.*

*Alors*

1.  $C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  est une courbe algébrique,
2. Si  $C$  est irréductible, alors  $C^*$  est également irréductible et  $\deg C^* \geq 2$ ,
3.  $C^{**} = C$ .

Les deux premiers points ont été prouvés lors de l'exposé précédent. Nous démontrons le troisième point dans la section suivante.

## 3 La bidualité d'une courbe

Dans cette section, nous introduisons d'abord certains nombres entiers appelés invariants numériques (d'une paramétrisation). Ceux-ci sont primordiaux pour la preuve du point 3 du Théorème 2.1.

### 3.1 Invariants numériques

Afin de définir les invariants numériques, nous présentons d'abord le lemme suivant.

**Lemme 3.1** Soient  $U \subset \mathbb{C}$  un voisinage ouvert de 0 et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une application holomorphe, tel que  $\varphi(U)$  n'est pas contenu dans une droite.

Alors il existe  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$  uniquement déterminés, de façon à ce que  $\varphi$  peut s'écrire comme  $\varphi(t) = (\varphi_0(t) : \varphi_1(t) : \varphi_2(t))$  avec

$$\begin{cases} \varphi_0 = 1 \\ \varphi_1 = t^{1+\alpha_1} + \dots \\ \varphi_2 = t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \dots \end{cases}$$

où ... indique les termes de degré plus haut en  $t$ , par une transformation linéaire de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

PREUVE. Soit  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  un lift de  $\varphi$ , c'est-à-dire  $\varphi|_U = (\phi_0 : \phi_1 : \phi_2)$ . Considérons la suite des dérivées de  $\phi$

$$\phi(0), \dot{\phi}(0), \ddot{\phi}(0), \dots, \phi^{(k)}(0), \dots,$$

Comme  $\varphi(U)$  n'est pas contenu dans une droite par hypothèse, il existe alors des  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$  tels que

$$(\phi(0), \phi^{1+\alpha_1}(0), \phi^{2+\alpha_1+\alpha_2}(0))$$

est une base de  $\mathbb{C}^3$ . On choisit  $\alpha_1, \alpha_2$  minimaux avec cette propriété, ce qui nous permet d'ajuster les coordonnées afin d'avoir  $\phi(0) = (1, 0, 0)$  et  $\phi_0 = 1$ . Nous avons alors

$$(\phi_1(t), \phi_2(t)) = t^{1+\alpha_1}(\dot{\phi}_1(t), \dot{\phi}_2(t))$$

avec  $(\dot{\phi}_1(0), \dot{\phi}_2(0)) \neq (0, 0)$  par définition de  $\alpha_1$ . Nous réitérons le processus afin d'obtenir  $(\dot{\phi}_1(0), \dot{\phi}_2(0)) = (1, 0)$ . Nous obtenons alors que

$$\dot{\phi}_2(t) = t^{1+\alpha_2}\ddot{\phi}_2(t) \text{ avec } \ddot{\phi}_2(0) \neq 0 \Rightarrow \phi_2(t) = t^{1+\alpha_1} \cdot t^{1+\alpha_2} \cdot \ddot{\phi}_2(t) = t^{2+\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ddot{\phi}_2(t)$$

par définition de  $\alpha_2$ . Nous transformons une dernière fois les coordonnées afin que  $\ddot{\phi}_2(0) = 1$ . Ainsi  $\phi_2(t) = t^{2+\alpha_1+\alpha_2}$ , ce qui était à démontrer.

L'unicité résulte de la minimalité de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . □

**Définition 3.1** Les nombres  $\alpha_1, \alpha_2$  sont **les invariants numériques locaux** de la paramétrisation  $\varphi$  au point 0.

Ces invariants numériques satisfont à (preuve plus tard (cf [1, ch.8.1]))

1.  $1 + \alpha_1 = \text{ord}_p(C)$
2.  $2 + \alpha_1 + \alpha_2 = \text{mult}_p(C \cap T_p C)$ .

Ainsi  $p$  est une singularité de  $C$  si et seulement si  $\alpha_1 \neq 0$ , (cf [1, p.31]), tandis que  $p$  est un point d'inflexion de  $C$  si et seulement si  $\alpha_2 \neq 0$  (et  $\alpha_1 = 0$ ) (cf [1, p.36]). Nous sommes maintenant prêts pour démontrer que  $C = C^{**}$  (cf Théorème 2.1, point 3).

### 3.2 Preuve de $C = C^{**}$

Considérons deux paramétrisations holomorphes

$$\varphi : S \rightarrow C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \text{ et } \varphi^* : S \rightarrow C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}),$$

où  $S$  est une surface de Riemann (cf [1, p.59]).

Nous allons construire une paramétrisation  $\varphi^{**} : S \rightarrow C^{**}$  et montrer que  $\varphi = \varphi^{**}$ .

Pour un  $o \in S$  et  $o \in U \subset S$  soit  $\varphi|_U = (\phi_0 : \phi_1 : \phi_2)$  avec

$$\begin{cases} \phi_0 = 1 \\ \phi_1 = t^{1+\alpha_1} + \dots \\ \phi_2 = t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \dots \end{cases} \quad (1)$$

(cf lemme 3.1). Pour passer de  $\varphi$  à  $\varphi^*$ , nous avons besoin de connaître l'équation linéaire de la tangente. Calculons d'abord les dérivées des composantes de notre paramétrisation.

Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\phi}_0 = 0 \\ \dot{\phi}_1 = (1 + \alpha_1)t^{\alpha_1} + \dots \\ \dot{\phi}_2 = (2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} + \dots \end{cases}$$

Ces dérivées nous permettent de construire la matrice (cf [1, p.59-60])

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \dot{\phi}_0 & \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t^{1+\alpha_1} & t^{2+\alpha_1+\alpha_2} \\ 0 & (1 + \alpha_1)t^{\alpha_1} & (2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour connaître les équations de la tangente, nous avons besoin de connaître les mineurs, i.e. le produit vectoriel des lignes de la matrice  $A$ . Nous obtenons donc  $(a_i := (-1)^i \det A_i)$  (cf [1, p 60])

$$\begin{cases} a_0 = t^{1+\alpha_1} \cdot (2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} - t^{2+\alpha_1+\alpha_2} \cdot (1 + \alpha_1)t^{\alpha_1} \\ a_1 = -(1 \cdot (2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} - 0) \\ a_2 = 1 \cdot (1 + \alpha_1)t^{\alpha_1} - 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a_0 = (1 + \alpha_2)t^{2+2\alpha_1+\alpha_2} + \dots \\ a_1 = -(2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} + \dots \\ a_2 = (1 + \alpha_1)t^{\alpha_1} + \dots \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi l'application

$$(a_0, a_1, a_2) : U \rightarrow \mathbb{C}^3$$

qui permet d'obtenir la paramétrisation  $\varphi^*|_U$ , i.e. les coordonnées de la tangente dans l'espace dual  $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  (cf Lemme 3.1). Il reste à retirer la plus grande puissance commune

aux  $a_i$  car nous obtenons la même tangente si l'on multiplie les coordonnées par un scalaire quelconque. Nous obtenons finalement

$$\begin{cases} \phi_0^* = (1 + \alpha_2)t^{2+\alpha_2+\alpha_1} + \dots, \\ \phi_1^* = -(2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_2} + \dots, \\ \phi_2^* = (1 + \alpha_1) + \dots \end{cases} \quad (2)$$

En comparant (1) et (2) nous avons que

$$\alpha_1^* = \alpha_2 \text{ et } \alpha_2^* = \alpha_1. \quad (3)$$

Déterminons maintenant la paramétrisation  $\varphi^{**}$ . Le procédé est le même que ci-dessus. Nous dérivons  $\phi_i^*$ ,  $i = 0, 1, 2$ , ce qui nous permet de construire la matrice  $A^*$  dans le but de calculer les mineurs de celle-ci. On a donc la matrice

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} \phi_0^* & \phi_1^* & \phi_2^* \\ \dot{\phi}_0^* & \dot{\phi}_1^* & \dot{\phi}_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \alpha_2)t^{2+\alpha_2+\alpha_1} & -(2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_2} & (1 + \alpha_1) \\ (1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2 + \alpha_1)t^{1+\alpha_2+\alpha_1} & -(2 + \alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_2)t^{\alpha_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les mineurs de cette matrice sont

$$\begin{cases} a_0^* = 0 - (1 + \alpha_1)(-(2 + \alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_2)t^{\alpha_2}) \\ a_1^* = -(0 - (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2 + \alpha_1)t^{1+\alpha_2+\alpha_1}) \\ a_2^* = (1 + \alpha_2)t^{2+\alpha_2+\alpha_1} - (2 + \alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_2)t^{\alpha_2} \\ \quad + (2 + \alpha_1 + \alpha_2)t^{1+\alpha_2}(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_2 + \alpha_1)t^{1+\alpha_2+\alpha_1} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a_0^* = ct^{\alpha_2} + \dots \\ a_1^* = ct^{\alpha_2}t^{1+\alpha_1} + \dots \\ a_2^* = ct^{\alpha_2}t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \dots \end{cases}$$

avec  $c = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(2 + \alpha_1 + \alpha_2)$ .

Par calculs, nous obtenons  $\varphi^{**}(o) = \varphi(o)$ . Comme  $o$  a été choisi arbitrairement, nous avons donc que  $\varphi^{**} = \varphi$ , et donc  $C^{**} = C$ .  $\square$

## 4 Les courbes de Plücker

Jusqu'à présent, nous avons traité des courbes algébriques en général. A partir de maintenant, nous nous restreignons au cas particulier des courbes de Plücker.

**Définition 4.1** Une courbe algébrique  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  est **une courbe de Plücker**, si

1.  $C$  est irréductible et  $\deg C \geq 2$ ,

2. Les singularités de  $C$  et  $C^*$  consistent en des doubles points simples et/ou des points de rebroussement simples.

Nous commençons par étudier plus en détails ces deux types de singularités avant d'énoncer les formules de Plücker. La preuve de celles-ci est présentée à la section 5.

## 4.1 Deux types de singularités

Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une courbe de Plücker. Ses singularités sont réparties en deux types (cf Définition 4.1). Rappelons que (cf [1, p.34-36])

1.  $p$  est **un double point simple de  $C$**  si  $\text{ord}_p(C) = 2$  et  $\text{mult}_p(C \cap T) = 3$ ; deux tangentes passent par  $p$ ,
2.  $p$  est **un point de rebroussement simple de  $C$**  si  $\text{ord}_p(C) = 2$  et  $\text{mult}_p(C \cap T) = 3$ ; une seule tangente passe par  $p$ .

Dans la preuve des formules de Plücker interviennent les équations affines de ces deux types de singularités. Nous construisons ces équations dans cette section. Nous donnons également les paramétrisations locales de ces deux cas (cf [1, p.54]).

Soit  $F(X_0, X_1, X_2)$  le polynôme minimal de  $C$ ,  $p = (1 : 0 : 0)$  et  $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$ . Nous avons donc  $f = f_{(2)} + f_{(3)} + \dots + f_{(n)}$  où

$$f_{(k)} = \sum_{i+j=k} c_{ij} X_1^i X_2^j \in \mathbb{C}[X_1, X_2] \quad (4)$$

sont des polynômes homogènes et  $n$  est le degré de la courbe  $C$ . Comme  $\text{ord}_p(C) = 2$ , considérons

$$f_{(2)} = c_0 X_1^2 + c_1 X_1 X_2 + c_2 X_2^2$$

(cf équation (4)). Distinguons deux cas :

1.  $c_1^2 \neq 4c_0c_2$  :  $f_{(2)}$  a deux zéros différents dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ;  $C$  a donc deux tangentes différentes en  $p$  et  $p$  est ainsi un double point. Dans notre cas, nous pouvons donc transformer les coordonnées pour que  $f_{(2)} = X_1 X_2$ , i.e.  $c_0 = c_2 = 0$  et  $c_1 = 1$ . Comme nous avons un double point simple,  $\text{mult}_p(C \cap T) = 3$  et ainsi  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas des diviseurs de  $f_{(3)}$ . Ecrivons  $f_{(3)}$  sous la forme (cf équation (4))

$$f_{(3)} = d_0 X_1^3 + d_1 X_1^2 X_2 + d_2 X_1 X_2^2 + d_3 X_2^3.$$

Comme  $d_0$  et  $d_3$  doivent être différents de zéro, choisissons  $d_0 = d_3 = -1$ . Cela est possible par une transformation de coordonnées. Nous avons alors

$$f = f_{(2)} + f_{(3)} + \dots + f_{(n)} = X_1 X_2 - X_1^3 - X_2^3 + h \quad (5)$$

avec  $\text{ord}_p(h) \geq 3$  et  $X_1 X_2$  divise  $h_{(3)}$ . L'équation (5) est **l'équation affine d'un double point simple**.

Comme  $p$  est un double point simple, les tangentes en  $p$  ont les équations  $X_1 = 0$  et  $X_2 = 0$ . Par le théorème des fonctions implicites (cf [1, 6.10 et A.3]), la tangente  $X_1 = 0$  possède une paramétrisation  $t \rightarrow (\varphi(t), t)$  avec

$$\varphi(t) = t^2 + \sum_{\nu \geq 3} \beta_\nu t^\nu$$

holomorphe et  $\varphi(0) = 0$ . De manière analogue, la tangente  $X_2 = 0$  possède une paramétrisation  $t \rightarrow (t, \varphi(t))$  (cf [1, p.63]).

2.  $c_1^2 = 4c_0c_2 : f_{(2)}$  a un zéro double, ce qui veut dire que  $C$  n'a qu'une seule tangente en  $p$  et  $p$  est donc un point de rebroussement ou pointe de  $C$ . Par une transformation de coordonnées nous obtenons que  $f_{(2)} = X_2^2$ , i.e.  $T = V(X_2)$  est une tangente à  $C$  en la pointe. Comme le point de rebroussement est simple, nous avons que  $\text{mult}_p(C \cap T) = 3$ . Transformons les coordonnées de  $f_3$  pour que  $d_0 \neq 0$ . Nous obtenons alors

$$f = f_{(2)} + f_{(3)} + \dots + f_{(n)} = X_2^2 - X_1^3 + X_2g + h \quad (6)$$

avec  $g$  homogène de degré 2 et  $\text{ord}_p(h) \geq 4$ . L'équation (6) est **l'équation affine d'un point de rebroussement simple**.

La paramétrisation locale dans ce cas est de la forme  $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$  où  $n = \text{ord}_p(C)$  (cf [1, chapitre 7]). Comme  $\text{ord}_p(C) = 2$ , nous avons  $t \mapsto (t^2, \varphi(t))$  où

$$\varphi(t) = t^3 + \sum_{\nu \geq 4} \alpha_\nu t^\nu.$$

Les invariants numériques locaux de cette paramétrisation sont

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, & \text{car } t^2 = t^{1+\alpha_1} \\ \alpha_2 = 0, & \text{car } t^3 = t^{2+\alpha_1+\alpha_2}. \end{cases}$$

**Remarque 4.1.1** Selon l'équation (3) on obtient que

$$\begin{cases} \alpha_1^* = 0 \\ \alpha_2^* = 1, \end{cases}$$

et donc qu'un point de rebroussement simple de  $C$  correspond à un point d'inflexion simple de  $C^*$  (cf [1, p.52]), et réciproquement.

## 4.2 Les formules de Plücker

Nous commençons par introduire quelques notations. Dans cette partie,  $C$  dénote toujours une courbe de Plücker.

Soient

- $d$  := nombre de doubles points de  $C$
- $d^*$  := nombre de doubles points de  $C^*$
- $s$  := nombre de points de rebroussement de  $C$
- $s^*$  := nombre de points de rebroussement de  $C^*$
- $n$  := degré de  $C$
- $n^*$  := la classe de  $C$ , c'est-à-dire le plus grand nombre possible de tangentes que l'on peut mener d'un point  $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  à un point lisse de  $C$ .

Dans le lemme suivant, nous résumons quelques relations entre  $C$  et sa courbe duale  $C^*$ .

**Lemme 4.1** *Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une courbe de Plücker. Alors*

- a)  $d^*$  := nombre de doubles tangentes de  $C$
- b)  $s^*$  := nombre de points d'inflexion de  $C$
- a)\*  $d$  := nombre de doubles tangentes de  $C^*$
- b)\*  $s$  := nombre de points d'inflexion de  $C^*$

PREUVE. a) Soit  $T$  une double tangente de  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .  $T$  a donc deux points de contact  $p_1$  et  $p_2$  avec la courbe  $C$ . Selon la définition d'une courbe duale (cf section 2), ces deux points correspondent à la même tangente dans  $C^*$ , autrement dit à un point double de  $C^*$ .

b) Cf Remarque 4.1.1

a)\*, resp. b)\*, dual à a), resp. b). □

**Théorème 4.1 : Les formules de Plücker.** *Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  une courbe de Plücker de degré  $n$  et de classe  $n^*$ . Alors*

- 1.  $n^* = n(n-1) - 2d - 3s$  (**Formule de classe**)
- 2.  $s^* = 3n(n-2) - 6d - 8s$  (**Formule des points d'inflexion**)
- 1\*.  $n = n^*(n^* - 1) - 2d^* - 3s^*$
- 2\*.  $s = 3n^*(n^* - 2) - 6d^* - 8s^*$

Nous illustrons ces formules dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.1** *Soit  $C$  une cubique irréductible. Comme celle-ci est de degré 3 ( $n = 3$ ), elle possède au plus (cf [1, p.40])*

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 1$$

*singularité. Nous distinguons trois cas différents :*

- 1.  $C$  ne possède aucune singularité. Nous avons donc  $d = s = 0$ . Par les formules de Plücker nous obtenons :
  - $n^* = 3 \cdot (3-1) - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 6$ ,
  - $s^* = 3 \cdot 3 \cdot (3-2) - 6 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 9$
  - $d^* = 0$ .



2.  $C$  possède exactement un point double simple. Nous avons donc  $d = 1$  et  $s = 0$ . Par les formules de Plücker nous obtenons :

$$\begin{aligned} n^* &= 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 4, \\ s^* &= 3 \cdot 3 \cdot (3 - 2) - 6 \cdot 1 - 8 \cdot 0 = 3 \\ d^* &= \frac{3 - 4 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot 3}{-2} = 0. \end{aligned}$$

3.  $C$  possède exactement un point de rebroussement (comme par exemple la parabole de Neil). Nous avons donc  $s = 1$  et  $d = 0$ . Par les formules de Plücker nous obtenons :

$$\begin{aligned} n^* &= 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 3, \\ s^* &= 3 \cdot 3 \cdot (3 - 2) - 6 \cdot 0 - 8 \cdot 1 = 1 \\ d^* &= \frac{3 - 3 \cdot (3 - 1) + 3 \cdot 1}{-2} = 0. \end{aligned}$$

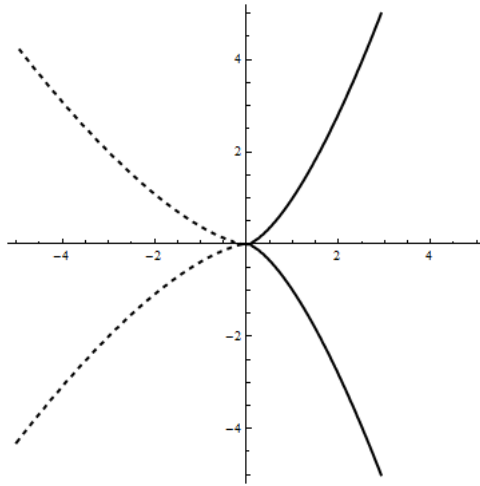


FIGURE 1 – La parabole de Neil et sa duale

## 5 Preuve des formules de Plücker

Dans cette section nous utilisons les notations introduites à la partie 4.2.

Avant de démontrer ces formules, nous présentons la remarque suivante qui intervient dans la preuve de la formule de classe (cf Théorème 4.1).

**Remarque 5.0.1** Soit  $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  irréductible avec  $\deg C \geq 2$  et  $C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$  sa courbe duale. Alors  $n^* = \deg C^*$ . De plus, le nombre maximal  $n^*$  de tangentes est atteint pour presque tous les points  $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

PREUVE. Soit  $q \in \mathbb{P}_2$  correspondant à une droite  $q^* \subset \mathbb{P}_2^*$ . Par la définition de  $C^*$ , chaque point de  $q^* \cap C^*$  est une tangente de  $C$  en  $q$ . De plus nous savons que  $\text{mult}_p(C^* \cap q^*) = n^*$  (cf [1, 2.5]) et que pour presque toutes les droites  $q^*$ , les points d'intersection sont tous

simples. □

### Preuve des formules de Plücker (cf Théorème 4.1)

Nous démontrons seulement les points 1.(Formule de classe) et 2.(Formules des points d'inflexion), car 1\*. et 2\*. suivent par dualité.

#### 1. Formule de classe : $n^* = n(n - 1) - 2d - 3s$

Soit  $q$  un point quelconque. Coupons la courbe  $C$  avec la polaire  $P_qC = V(D_qC)$ .  $P_qC$  doit mener  $n^*$  tangentes du point  $q$  aux points singuliers  $p_1, \dots, p_{n^*}$  de  $C$  (cf Remarque 5.0.1). Comme  $C$  est une courbe de Plücker,  $q$  est choisi à l'extérieur de toutes les doubles tangentes et de toutes les tangentes en des points d'inflexion.  $P_qC$  coupe donc transversalement la courbe  $C$ . Nous savons alors que  $\text{mult}_p(C \cap P_qC) = 1$  pour  $p \in \{p_1, \dots, p_{n^*}\}$  (cf [1, p.46]).

Par Bézout nous avons :

$$\sum_{p \in C \cap P_qC} \text{mult}_p(C \cap P_qC) = \text{deg}C \cdot \text{deg}P_qC = n \cdot (n - 1).$$

Comme  $C \cap P_qC$  consiste en les singularités de  $C$  et les points de contacts des tangentes à  $C$  passant par  $q$  (cf [1, p. 46]), nous avons

$$\sum_{p \in C \cap P_qC} \text{mult}_p(C \cap P_qC) = \sum_{p \in \text{Sing}C} \text{mult}_p(C \cap P_qC) + n^*.$$

Il suit que

$$n^* = n \cdot (n - 1) - \sum_{p \in \text{Sing}C} \text{mult}_p(C \cap P_qC).$$

Admettons que  $q$  ne soit pas contenu dans une tangente passant par  $p \in \text{Sing}C$ . Il reste à montrer

$$\text{mult}_p(C \cap P_qC) = \begin{cases} 2 & \text{si } p \text{ est un double point simple,} \\ 3 & \text{si } p \text{ est un point de rebroussement simple.} \end{cases}$$

Premier cas :

Soient  $p = (1 : 0 : 0)$  un double point simple et  $q$  tel que  $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ . Par l'équation (5) nous avons

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^{n-2}X_1X_2 + G(X_0, X_1, X_2),$$

avec  $\text{ord}_p(G(1, X_1, X_2)) \geq 3$ . La polaire est lisse en  $p$  car  $\text{grad}_p D_q F \neq (0, 0, 0)$ . En effet,

$$D_q F = q_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + q_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} = q_0 X_1 X_2 + q_1 X_0^{n-2} X_2 + q_2 X_0^{n-2} X_1 + H(X_0, X_1, X_2),$$

avec  $\text{ord}_p(H(1, X_1, X_2)) \geq 2$  (cf [1, p.45, exemple 4.1.d]).

et

$$\frac{\partial D_q F}{\partial X_2} = q_0 X_1 + q_1 X_0^{n-2} + \frac{\partial H}{\partial X_2} \neq 0$$

car  $X_0 = 1$ . Il s'en suit que  $\text{mult}_p(C \cap P_q C) = 2$ .

Deuxième cas :

Soit  $p$  un point de rebroussement simple. Par l'équation (6) nous avons

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^{n-2} X_2^2 - X_0^{n-3} X_1^3 + X_0^{n-2} X_2 g(X_1, X_2) + H(X_0, X_1, X_2)$$

et

$$D_q F = \dots = 2q_2 X_0^{n-2} X_2 + G(X_0, X_1, X_2) = 2q_2 X_2 + G(X_0, X_1, X_2)$$

avec  $\text{ord}_p(G(1, X_1, X_2)) \geq 2$ .

Comme  $q$  n'est pas contenu dans une tangente  $V(X_2)$ , alors

$$q_2 \neq 0 \text{ et } \text{grad}_p D_q F \neq (0, 0, 0).$$

$P_q C$  est lisse en  $p$  avec  $T = V(X_2)$  et  $\text{mult}_p(C \cap P_q C) > 2$  (cf [1, p.36]). Au chapitre 8, nous verrons que

$$\text{mult}_p(C \cap P_q C) = \text{ord}_0(\varphi).$$

En utilisant la paramétrisation locale pour un point de rebroussement simple dans l'équation de la polaire, nous obtenons  $\varphi(t) = 2q_2 t^3 + \psi(t)$  avec  $\text{ord}_0(\psi) \geq 4$ . Ainsi  $\text{mult}_p(C \cap P_q C) = \text{ord}_0(\varphi) = 3$ .

## 2. Formule des points d'inflexion : $s^* = 3n(n-2) - 6d - 8s$

Le procédé est similaire à celui utilisé pour la preuve de la formule de classe, à cela près que nous utilisons la courbe hessienne  $H(C)$  de  $C$  au lieu de la polaire.

Comme une courbe algébrique de degré  $\geq 2$ , ne contenant pas de droite, possède au plus  $3n(n-2)$  points d'inflexion (cf [1, p.49]), nous avons que

$$s^* \leq 3n(n-2).$$

Comme  $\text{Sing} C \subset H(C)$  (cf [1, p.48]) et  $C$  et  $H(C)$  n'ont pas de composantes communes (cf [1, p.48]), nous obtenons

$$s^* = 3n(n-2) - \sum_{p \in \text{Sing} C} \text{mult}_p(C \cap H(C)).$$

Les points d'intersections entre  $H(C)$  et un point lisse de  $C$  sont tous simples (cf [1, p.48]). Il reste donc à montrer

$$\text{mult}_p(C \cap H(C)) = \begin{cases} 6 & \text{si } p \text{ est un double point simple,} \\ 8 & \text{si } p \text{ est un point de rebroussement simple.} \end{cases}$$

Premier cas :

Soient  $p = (1 : 0 : 0)$  un double point simple, et  $X_0 = 1$ . Par l'équation (5), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \det H_F(1, X_1, X_2) &= \frac{n-1}{X_0^2} \begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} \\ &= (n-1) \begin{vmatrix} n(X_1X_2 - X_1^3 - X_2^3) & X_2 - 3X_1^2 & X_1 - 3X_2^2 \\ (n-1)X_2 - 3X_1^2 & -6X_1 & 1 \\ (n-1)X_1 - 3X_2^2 & 1 & -6X_2 \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= (n-1)(n-2)X_1X_2 + n(n-1)(X_1^3 + X_2^3) + \tilde{h} \end{aligned}$$

avec  $\text{ord}_p(\tilde{h}) \geq 4$ .

$H(C)$  possède donc également un double point simple en  $p$  avec les mêmes tangentes, car nous avons la même équation affine.

En utilisant la paramétrisation d'une tangente de  $C$  dans  $H(C)$  dans l'équation de la hessienne, nous obtenons

$$\varphi(t) = 2(n-1)^2t^3 + \psi(t)$$

avec  $\text{ord}_0(\psi) \geq 4$ . Ainsi

$$\text{mult}_p(C \cap H(C)) = 2 \cdot \text{ord}_0(\varphi) = 2 \cdot 3 = 6$$

(cf [1, chapitre 8]). Précisons que l'on multiplie  $\text{ord}_0(\varphi)$  par 2, car nous avons une paramétrisation pour chacune des tangentes.

Deuxième cas :

Soit  $p$  un point de rebroussement simple. Par (6), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \det H_F &= (n-1) \cdot \begin{vmatrix} n(X_2^2 - X_1^3 + d_1X_1^2X_2) & (-2X_1^2 + 2d_1X_1X_2) & (2X_2 + d_1X_1^2) \\ (n-1)(-2X_1^2 + 2d_1X_1X_2) & -4X_1 + 2d_1X_2 & 2d_1X_1 \\ (n-1)(2X_2 + d_1X_1^2) & 2d_1X_1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= 4(n-1)(n-2)(3X_1 - d_1X_2)X_2^2 - 6(n-1)(n-3)X_1^4 + \dots \end{aligned}$$

En utilisant la paramétrisation de  $C$  pour un point de rebroussement simple, nous avons

$$\varphi(t) = \alpha t^8 + \psi(t)$$

avec  $\alpha \neq 0$  et  $\text{ord}_0(\psi) \geq 9$ . Ainsi

$$\text{mult}_p(C \cap H(C)) = 8.$$

□

## Références

- [1] G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg