Proséminaire mathématiques*
Les tangentes et la multiplicité de deux variétés engendrées par des séries entières convergentes

Boris ZUEBLIN

Fribourg, le 16 décembre 2010

Table des matières

*Basé sur le livre de Gerd Fisher *Ebene algebraische Kurven* pp 113 à 125.

1 Introduction

Ce dernier chapitre du proséminaire d'automne 2010 est un chapitre de récolte. En effet, dans les derniers exposés, nous avons vu toute une série de théorèmes, de définitions ou de lemmes sur les séries entières convergentes. Il est temps maintenant d'utiliser tout cela pour prouver certains théorèmes très utiles qui n'ont pas pus être prouvés dans le passé car nous n'avions pas les moyens mathématiques nécessaires. En effet, lors du chapitre 3, nous avons rencontré deux théorèmes fondamentaux (cf [1, Théorème 3.5] pour le 1.2 et [1, Théorème 3.6] pour le 1.1) qui ont été utilisés par la suite, mais dont la preuve n'a été qu'esquissée. Le but de cet exposé va être donc de prouver le

Théorème 1.1. *Soit $p \in C \subset \mathbb{P}_2$ et $L \subset \mathbb{P}_2$ une droite. L est une tangente à C en p si il existe une suite de points réguliers $p_i \subset C$ qui converge vers p tel que*

$$L = \lim_{i \to \infty} T_{p_i} C.$$

et le

Théorème 1.2. *Soient C et $C' \in \mathbb{C}^2$ des courbes algébriques sans composante commune. Il en suit que, pour un $p \in C \cap C'$,*

$$mult_p \left(C \cap C'\right) \geq ord_p \left(C\right) \cdot ord_p \left(C'\right).$$

Il y a égalité si C et C' n'ont aucune tangente commune.

Pour se faire, nous allons utiliser les résultats analytiques sur les séries entière convergentes et sur les germes de courbes vus dans les chapitres précédents. Nous auront principalement besoin du théorème sur les paramétrisations en des séries de Puiseux (cf [1, Théorème 7.2]) et du théorème sur la décomposition des germes de courbes en germes de courbes irréductibles (cf [1, Théorème 6.14]).

Notre exposé comportera deux chapitres principaux. Le premier aura pour but de généraliser les tangentes, du contexte des courbes algébriques à celui des germes de courbes. Après cette généralisation et un théorème préparatif, nous pourrons entamer la preuve du théorème qui généralise le Théorème 1.1. Le second chapitre sera un peu plus constructif. En effet, pour généraliser la définition de la multiplicité dans le contexte des germes de courbes, nous procéderons par étape afin de bien comprendre les raisonnements charnières de la définition finale. Nous finirons l'exposé par la preuve du théorème généralisant, cette fois, le Théorème 1.2.

2 Tangentes

Définition 2.1. *Soit $f \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ avec $l = ordf \geq 1$ et $f_{(l)}$ le polynôme initial de f. Alors les droites $V\left(f_{(l)}\right) \subset \mathbb{C}^2$ sont appelées les **tangentes** au germe de courbe $C = V(f)$.*

Comme tout f peut se décomposer en des facteurs premiers (cf [1, Théorème 6.11])

$$f = f_1^{r_1} \cdot \dots \cdot f_n^{r_n},$$

le polynôme initial $f_{(l)}$ peut s'écrire sous la forme

$$f_{(l)} = f_{1(l_1)}^{r_1} \cdot \dots \cdot f_{n(l_n)}^{r_n}.$$

Nous pouvons choisir convenablement les coordonnées de manière à ce que X ne divise pas f et donc aucun des f_j. Ce qui revient à dire que les f_j peuvent être considérés comme des polynômes de Weierstrass en Y avec coefficients dans les séries entières convergentes en X. Il nous suffit donc de trouver une manière simple de déterminer le germe de courbe engendré par le polynôme initiale d'un $f \in \mathbb{C}\langle X\rangle [Y]$. Cette détermination est aisée grâce au

Théorème 2.2. *Soit $f \in \mathbb{C}\langle Y\rangle [X]$, un polynôme de Weierstrass de degré k et $l := ordf$. Alors il existe a et $b \in \mathbb{C}$ tel que $(a, b) \neq 0$ et*

$$f_{(l)} = (aX + bY)^l.$$

Démonstration. Ecrivons la paramétrisation de Puiseux

$$T \mapsto \left(T^k, \phi(T)\right) \quad \text{avec } \phi(T) = cT^r + \dots, c \neq 0, r \geq 1.$$

Par un théorème (cf [1, Corollaire 7.10]), nous avons

$$f(X, Y) = \left(Y - \phi_1\left(X^{\frac{1}{k}}\right)\right) \cdot \dots \cdot \left(Y - \phi_k\left(X^{\frac{1}{k}}\right)\right)$$

où $\phi_i\left(X^{\frac{1}{k}}\right) = \phi\left(\varsigma^i X^{\frac{1}{k}}\right) = c\varsigma^{ir} X^{\frac{r}{k}} + \dots$ avec ς la $k^{\text{ème}}$ racine de l'unité. Posons

$$\tilde{f}(X, Y) := \prod_{i=1}^{k} \left(Y - c\varsigma^{ir} X^{\frac{r}{k}}\right).$$

Comme la partie non prise en compte dans notre produit ne contient que des exposants plus grands que ceux contenus dans $\tilde{f}$,
$\tilde{f}_{(l)} = f_{(l)}$ et donc

$$f_{(l)} = \begin{cases} aX^r, \text{ avec } a \in \mathbb{C}, & \text{alors } l = r, \quad \text{si } r < k \\ (Y - cX)^r, & \text{alors } l = k, \quad \text{si } r = k \\ Y^k, & \text{alors } l = k, \quad \text{si } r > k \end{cases}.$$

□

Ceci nous amène au

Théorème 2.3 (Généralisation du Théorème 1.1)**.** *Soit* $f \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ *qui converge dans*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{C} : |x| < \gamma, |y| < \sigma\}, \qquad f(0,0) = 0$$

et soit $C = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}$ *un représentant des germes de courbes. Pour une droite* L *passant par l'orignie dans* $\mathbb{C}^2$*, nous avons les équivalences suivantes :*

1. *L est tangente à C en* 0
2. *L est la limite de sécantes entre* 0 *et* p_i *avec* $0 \neq p_i \in C$ *et* $\lim_{i\to\infty} p_i = p$
3. *L est la limite des tangentes en les points de continuité* $0 \neq p_i \in C$ *avec* $\lim_{i\to\infty} p_i = p$

Démonstration. Nous allons prendre le cas branche par branche (possible par le Théorème 2.2) afin de n'avoir à prouver le théorème que pour un polynôme de Weirerstrass f irréductible. Nous supposons encore que l'équation de la tangente est $Y = 0$. (La preuve est similaire dans toutes les directions, mais avec cette supposition, nous simplifions le côté technique des calculs.) La paramétrisation de Puiseux f est de la forme

$$t \mapsto \phi(t) = \left(t^k, ct^r + \ldots\right), \text{ avec } 1 \leq k < r, c \neq 0.$$

Pour un t tout proche de 0, la direction de la sécante est la même que celle de la tangente. En effet,

$$\phi(t) = \left(t^k, ct^r + \ldots\right) = t^k \left(1, ct^{r-k} + \ldots\right).$$

Lorsque l'on fait tendre $t \to 0$, la direction tend vers $(1, 0)$. La direction de la tangente, pour un t tout proche de 0, dépend de la dérivée de la paramétrisation

$$\left(kt^{k-1}, crt^{r-1} + \ldots\right) = t^{k-1} \left(k, crt^{r-k} + \ldots\right).$$

Encore une fois, en faisant tendre $t \to 0$, la direction de la tangeante tend vers $(k, 0)$ et comme $(k, 0)$ est parallèle à $(1, 0)$ et que les deux droites passent par un même point $(0, 0)$, les deux droites sont identiques et L est tangente en 0. $\square$

3 Multiplicité

Nous allons maintenant changer de sujet. En effet nous devons maintenant généraliser la multiplicité dans le contexte plus général des série entière convergente. Nous allons procéder de manière constructive décomposant notre cheminement en plusieurs étapes de plus en plus générales.

3.1 La multiplicité d'une variété engendrée par une série entière convergente et d'une droite

Comme explicité précédemment, nous allons commencer par traiter le cas où l'une des deux variétés est une droite.
Soit $C = V(f)$ avec $f \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ minimale, L une droite et soit
$T \mapsto (\lambda T, \mu T)$, avec $\lambda \neq 0 \neq \mu$, une paramétrisation linéaire de notre droite L.

Définition 3.1. *Avec $h(T) := f(\lambda T, \mu T)$, nous pouvons définir*

$$mult(C, L) := ord(h)$$

.

Rappel 3.2. *Pour $f \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$,*

$$ord(f) := \begin{cases} min\left\{d : f_{(d)} \neq 0\right\} & si\ f \neq 0 \\ \infty & si\ f = 0 \end{cases}$$

(cf [1, Définition 6.2])

Cette définition est très agréable, en effet, elle nous donne beaucoup de propriétés très agréables, comme une indépendance à l'équation de C, à la paramétrisation de L ou encore à une transformation de coordonnées dans $\mathbb{C}^2$. Comme certaines de ces propriétés sont plus intéressantes que d'autres dans le cadre de notre exposé, nous n'allons pas toutes les traiter en détails et nous canaliserons notre attention sur les plus enrichissantes.

Proposition 3.3. *$mult(C, L)$ est linéaire par rapport au premier argument (au sens des unions). Pour*

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$$

nous avons $mult(C, L) = mult(C_1, L) + mult(C_2, L) + \ldots + mult(C_n, L)$.

Démonstration. Pour $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$, $C_i = V(f_i)$ et $h_i(T) := f_i(\lambda T, \mu T)$, nous avons que $h = h_1 h_2 \ldots h_n$ et donc que

$$\operatorname{ord}(h) = \operatorname{ord}(h_1) + \operatorname{ord}(h_2) + \ldots + \operatorname{ord}(h_n).$$

□

3.2 La multiplicité d'une variété engendrée par une série entière convergente et d'un germe irréductible

Les droites sont en fait des germes de courbes irréductibles spéciaux. En effet, nous pouvons les paramétriser de manière simple et évidente. Nous allons essayer maintenant d'avancer gentiment vers notre but en passant, pour C', d'une droite à un germe irréductible. Pour se faire, nous devons continuer un peu la théorie sur les germes vue dans les exposés précédents. Nous allons commencer, pour faire le lien, par paramétriser des séries entières convergentes irréductibles.

Définition 3.4. *Soit $g \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ et soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\langle T\rangle$. Le deux-tuplet $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ est appelé* ***la paramétrisation locale du germe*** *$V(g)$ si il existe deux voisinages $V \subset \mathbb{C}$ et $U \subset \mathbb{C}^2$ de mesure de Lebesgue nulle tel que :*

1) ϕ_1, ϕ_2 convergent dans V et que g converge dans U

2) $\Phi(V) \subset C = V(g) \subset U$

3) $\Phi : V \to C$ est bijective.

Ce qui nous donne directement le

Théorème 3.5. *Chaque courbe de germe irréductible $V(g)$ possède au moins une paramétrisation locale. De plus, si nous avons deux paramétrisations locales $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ et $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, nous pouvons affirmer qu'il existe une série entière convergente β d'odre 1 avec $\psi_i(\beta(T)) = \phi_i(T)$ pour $i = 1, 2$. Deux telles paramétrisations sont dites équivalentes.*

Démonstration. La preuve nécessitant une grande quantité de théorèmes et de définitions vus durant les autres séminaires, le lecteur est fortement invité à se référer au livre pour une compréhension exhaustive. Nous présentons ici uniquement le cheminement de la preuve.

Par le Théorème de préparation de Weierstrass, nous pouvons traiter g comme un polynôme de Weierstrass (cf [1, Théorème 6.7]). Il s'ensuit l'existence d'une paramétrisa- tion locale par le Théorème de Puiseux (cf [1, Théorème 7.8]). Par un Lemme (cf [1, Lemme 6.6]), nous avons que $\phi_1(T) = T^k$ avec $k = \mathrm{ord} g$. Comme les ϕ_i et les ψ_i sont dans $\mathbb{C}\langle T\rangle$, nous pouvons, par un Théorème (cf [1, Théorème 7.7]) affirmer que

$$\phi_1(T) = T^k \text{ et } \psi_1(T) = T^l.$$

Par la condition 3) des paramétrisations locales de germe (3.4), $l = k$. Par un Théorème)cf [1, Théorème 7.10]), il existe une $k^{\text{ème}}$ racine de l'unité σ avec $\psi_2(\sigma T) = \phi_2(T)$. La transformation

$$S = \sigma T = \beta(T)$$

est donc suffisante. En effet, par construction $\psi_i(\beta(T)) = \phi_i(T)$ pour $i = 1, 2$ et ord$\beta = 1$. □

Ceci nous amène à la

Définition 3.6. *Soient C et C' deux germes de courbes, $C = V(f)$ avec $f \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ minimale. Soit encore C' irréductible avec une paramétrisation $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$. Alors la multiplicité d'une variété engendrée par une série entière convergente et d'un germe irréductible est définie par*

$$mult(C, C') := ord_T f(\phi_1(T), \phi_2(T)).$$

Nous retrouvons, par cette définition, des propriétés similaires à celles énnoncées lors de la définition de la multiplicité d'une variété engendrée par une série entière convergente et d'une droite (cf [3.1]). Nous avons donc une indépendances aux transformations linéaires de coordonnées dans $\mathbb{C}^2$, à l'équation de f de C et à la paramétrisation Φ de C'.

3.3 La multiplicité de deux variétés engendrées par des séries entières convergentes

Jusqu'à maintenant, nous avons dû malheureusement nous limiter aux cas où f était minimale. Mais avec les outils ci-dessus et toutes les préparations analytiques des derniers exposés, nous sommes en mesure de donner une défintion consistante de la multiplicité de deux variétés engendrées par des séries entières convergentes.

Soient $f, g \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ avec leur décomposition en facteurs premiers (possible par un Théorème (cf [1, Théorème 6.11])

$$f = f_1^{r_1} \cdot f_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot f_m^{r_m} \qquad \text{et} \qquad g = g_1^{s_1} \cdot g_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot g_n^{s_n}.$$

Nous obtenons ainsi, en posant que $C_i := V(f_i)$ et que $C'_j := V(g_j)$, la

Définition 3.7.

$$mult(C, C') = \sum_{i,j=1}^{m,n} r_i s_j \, mult\left(C_i, C'_j\right).$$

Nous prenons donc ici les C_i par leur équation et les C'_j par leur paramétrisation. A ce stade, nous sommes obligé de constater que la définition de notre multiplicité dépend de l'ordre des arguments. Pour que notre définition soit consistante, il faut qu'elle soit symétrique. Malheureusement, pour l'instant, rien ne prouve cette symétrie, nous aurons donc besoin de la

Proposition 3.8. *Soient f, g des polynômes de Weierstrass et leur résultante (cf [1, Théorème A.1.4]) $Res_{f,g} \in \mathbb{C}\langle X\rangle$. Nous avons alors*

$$mult\left(V\left(f\right), V\left(g\right)\right) = ord\ Res_{f,g}.$$

Démonstration. Par les propriétés de la résultante (cf [1, Corollaire A.1.4]), nous pouvons faire une simplification et supposer que, srdlg, f et g sont irréductibles. Soit $k = \deg f$, $l = \deg g$, $\sigma = \exp\frac{2\pi i}{k}$ et $\xi = \exp\frac{2\pi i}{l}$. Nous pouvons écrire leur paramétrisation de Puiseux (cf [1, Théorème 7.8]).

$$S \mapsto \left(S^k, \phi\left(S\right)\right), \qquad T \mapsto \left(T^k, \psi\left(T\right)\right).$$

Par un Théorème (cf [1,Corollaire 7.10])

$$f\left(X,Y\right) = \prod_{\kappa=1}^{k}\left(Y - \phi\left(\sigma^{\kappa}X^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right) \quad \text{et} \quad g\left(X,Y\right) = \prod_{\lambda=1}^{l}\left(Y - \psi\left(\xi^{\lambda}X^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right).$$

Soit maintenant $h\left(t\right) := f\left(T^l, \psi\left(T\right)\right) = aT^p + \ldots$ avec $a \neq 0$, $p := \mathrm{ord}_T h$. Alors, pour $\lambda = 1, \ldots, l$,

$$h_\lambda\left(T\right) := f\left(T^l, \psi\left(\xi^\lambda T\right)\right) = a\xi^{p\lambda}T^p + \ldots.$$

De plus nous avons

$$\mathrm{ord}_T h = \mathrm{ord}_X\left(h_1 \cdot \ldots \cdot h_l\right),$$

car $h_1\left(T\right) \cdot \ldots \cdot h_l\left(T\right) = bT^{pl} + \ldots = bX^p + \ldots$.

Nous avons finalement, après toutes ces préparations et avec l'aide de l'Annexe A.1.4,

$$\begin{aligned}
\mathrm{mult}\left(V\left(f\right), V\left(g\right)\right) &= \mathrm{ord}_T h = \mathrm{ord}_X\left(h_1 \cdot \ldots \cdot h_l\right)\\
&= \mathrm{ord}_X\left(\prod_{\lambda=1}^{l} f\left(X, \psi\left(\xi^\lambda T\right)\right)\right)\\
&= \mathrm{ord}_X\left(\prod_{\lambda=1}^{l}\prod_{\kappa=0}^{k}\left(\psi\left(\xi^\lambda X^{\frac{1}{l}}\right) - \phi\left(\sigma^\kappa X^{\frac{1}{k}}\right)\right)\right)\\
&= \mathrm{ord}_X \mathrm{Res}_{f,g}.
\end{aligned}$$

□

La symétrie de la Définition 3.7 suit directement de la Propostion 3.8. En effet, nous avons le

Théorème 3.9. *Pour des germes de courbes C et C', $mult(C, C') = mult(C', C)$*

Démonstration. Nous avons simplement à utiliser la Proposition (3.8) et le fait que

$$\mathrm{Res}_{f,g} = \mp \mathrm{Res}_{g,f}.$$

(cf [1, Théorème A.1.4]) □

Nous avions vu dans le chapitre 3, l'importance d'une borne inférieure pour notre mult (C, C'). En effet, quelque soit la relation que nous utilisons (ordre de la résultante, ou la somme sur les facteurs irréductibles), le calcul de cette multiplicité demande un grand volume de calculs, parfois, en plus, difficiles à effectuer. Nous avons vu au chapitre 3 (cf [1, Théorème 3.5])

Théorème 3.10. *Soit $C, C' \subset \mathbb{C}^2$ alors, pour un $p \in C \cap C'$,*

$$mult_p\,(C \cap C') \geq ord_p\,(C) \cdot ord_p\,(C')\,.$$

Avec l'égalité dans le cas où C et C' n'ont pas de tangente commune.

A ce moment-là, nous n'avions pas les outils pour prouver une telle affirmation. Nous avons donc dû, par la suite, supposé ce théorème vrai. Nous allons maintenant procéder à une généralisation de ce théorème à des séries entières convergentes et aussi donner enfin une preuve de ce théorème fondamental.

Théorème 3.11. *Pour C et C' deux germes de courbes, nous avons*

$$mult\,(C, C') \geq ord\,(C) \cdot ord\,(C')\,,$$

avec égalité dans le cas où C et C' n'ont pas de tangente commune.

Démonstration. Nous allons, comme précédemment, srdlg, supposer que C et C' soient irréductibles. Supposons encore que $C = V(f)$ et $C' = V(g)$ avec f, g des polynômes de Weierstrass et que les coordonnées soient telles que

$$\mathrm{ord}\,(C) = \deg\, f =: k \qquad \text{et que} \qquad \mathrm{ord}\,(C') = \deg\, g =: l.$$

Nous pouvons présupposer que la droite $Y = 0$ n'est pas tangente à C ou C'. Par le Théorème 2.2 et ces présuppositions, nous pouvons donner une paramétrisation de Puiseux

$$\begin{aligned} S &\mapsto \left(S^k, \phi(S)\right) && \text{avec} && \phi(S) = aS^k + \ldots, a \neq 0 \text{ et} \\ T &\mapsto \left(T^l, \psi(T)\right) && \text{avec} && \psi(T) = bS^l + \ldots, b \neq 0. \end{aligned}$$

Les équations des tangentes sont donc $Y = aX$ et $Y = bX$. Nous avons donc

$$\prod_{\lambda=1}^{l}\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\psi\left(\xi^{\lambda}X^{\frac{1}{l}}\right)-\phi\left(\sigma^{\kappa}X^{\frac{1}{k}}\right)\right)=(b-a)^{kl}\,X^{kl}+\ldots,$$

alors

$$\text{mult}\,(C,C') = kl \quad \text{si} \quad a \neq b, \qquad \text{et} \qquad \text{mult}\,(C,C') > kl \quad \text{si} \quad a = b.$$

□

3.4 Multiplicité dans l'espace projectif complexe de dimension deux

Nous ne nous sommes pas encore intéressés à ce qui pouvait se passer lorsque nous ne regardons plus le problème en bas, dans $\mathbb{C}^2$, mais que nous élargissons notre angle de vue pour tout traiter depuis $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. En effet, nos définitions et nos théorèmes nous offrent de très bonnes propriétés et d'agréables relations, mais elles sont limitées dans le sens où elles ne prennent pas en compte les points limites comme l'infini.

Définition 3.12. *Soit $C = V(F)$ et $C' = V(G) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ avec $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in C \cap C'$ et $p' = (p_0 : p_1)$. Alors, comme défini précédemment (cf [1,Définition 2.7]), nous avons*

$$mult_p\,(C \cap C') = ord_{p'}\,(Res_{F,G})\,.$$

De plus, nous pouvons considérer les germes C_p et C'_p de C et C' en p. En utilisant les Définitions de ce chapitre et la Définition 3.12, nous obtenons le

Théorème 3.13.

$$mult_p\,(C \cap C') = mult\left(C_p \cap C'_p\right).$$

Démonstration. En développant G et F par rapport à la variable X_2 et en utilisant les propriétés de l'espace projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ nous avons que la multiplicité ne dépend que de la variable X_1. En effet,

$$\text{mult}_p\,(C \cap C') = \text{ord}_{x_1} R'\,(X_1)$$

pour x_1 une droite dépendante de X_1 d'équation $x_1 = X_1$. Comme précédemment, utilisons

$$f = (Y - \phi_1) \cdot \ldots \cdot (Y - \phi_m)\,,$$

$$g = (Y - \psi_1) \cdot \ldots \cdot (Y - \psi_n) \, .$$

La résultante de F et G vaut donc (cf [1, Théorème A.1.4])

$$R_{F,G} = R' = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\phi_i - \psi_j).$$

Pour le calcul de mult $\left(C_p \cap C'_p\right)$, nous appliquons les définitions vues précédemment et la résultante de f et g vaut

$$R_{f,g} = \tilde{R} = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} (\phi_i - \psi_j).$$

Nous savons que F et G sont des fonctions dans l'espace projectif et que leur restriction à $X_0 = 1$ nous donne respectivement f et g. Il est donc clair que $m \leq k$ et que $n \leq l$. Il faut dès lors, pour finir la preuve, démontrer que chaque terme qui est présent dans le premier double produit et pas dans le second soit d'ordre nul. Ceci se prouve par un raisonnement sur les ϕ_i et les ψ_j. $\square$

Ce théorème fait le lien entre la théorie vue depuis $\mathbb{C}^2$ et la théorie vue depuis $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

4 Conclusion

Cet exposé nous éclaircit enfin sur les preuves de deux des plus importants théorèmes vus dans les chapitres précédents. Nous avons pu aussi nous rendre compte de l'importance du travail que nous avons fait sur les séries entières convegentes. Il est très important de se souvenir du cheminement, surtout pour la partie multiplicité, afin de bien assimiler toutes les définitions qui découlent d'un raisonement logique et précis. Cet exposé a l'air assez simpliste et si l'on regarde les théorèmes finaux, ils ont l'air assez similaires à ceux que nous avions vus avant, mais il est primordial de bien comprendre à quel point ceci généralise le point de vue initial. En effet, une chose qui est affirmable pour des polynômes ne l'est pas forcément pour des séries entières convergentes. Cet exposé prend donc son importance plus dans la généralisation des concepts que dans la nouveauté.

Références

[1] Gerd Fischer, *Ebene algebraische Kurven.* vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik, 1994.